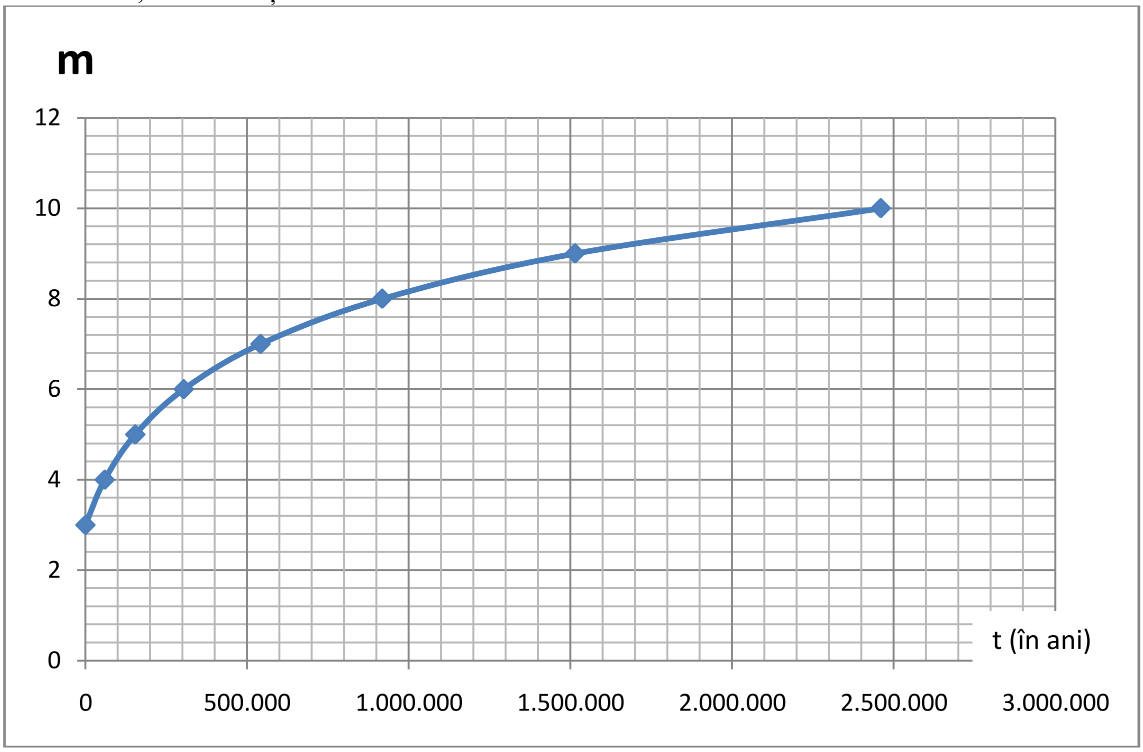
1) În graficul din figură este reprezentată magnitudinea aparentă a unei stele care se deplasează față de Pământ, în funcție de timpul măsurat în ani. Presupunând că steaua a fost observată la momentul t= 0, determinați:



a) **1 punct** Care a fost magnitudinea aparentă a stelei în momentul primei observări.
b) **1 punct** După cât timp steaua nu a mai putut fi observată cu achiul liber.
c) **3 punct** Găsiți relația al cărei grafic este reprezentat în figură.
d) **5 punct** Care este viteza cu care se deplasează steaua față de Pământ ştiind că distanța la care se afla steaua în momentul primei observări era de 8,5 ani lumină

Se cunosc: $1\,\text{an} = 365\,\text{zile}, \quad c = 3 \cdot 10^8\,\text{m/s}$

Rezolvare

$$E_0 \propto \frac{1}{D_0^2};\ E \propto \frac{1}{D^2}$$

$$\lg\frac{E_0}{E} = -0,4\cdot(m_0 - m)$$

$$\lg\left(\frac{D}{D_0}\right)^2 = -0,4\cdot(m_0 - m)$$

$$\lg\left(\frac{D_0 + v\cdot t}{D_0}\right)^2 = \lg 10^{-0,4\cdot(m_0 - m)}$$

$$D_0 + v\cdot t = D_0\cdot 10^{-0,2\cdot(m_0 - m)}$$

$$t = \frac{D_0}{v}\cdot\left(10^{-0,2\cdot(m_0 - m)} - 1\right)$$

Steaua se depărtează față de observator cu viteza $v = 2,5\,\text{Km/s}$.

2. Diferența magnitudinilor

Cele două componente, $(\sigma_1;\sigma_2)$, ale unui sistem stelar binar cu eclipsă, evoluează pe orbite circulare în jurul centrului de masă comun. Direcția liniei de observare se află chiar în planul orbitelor centrelor celor două stele. În raport cu observatorul de pe Pământ centrul de masă al sistemului este în repaus.

Să se determine diferența dintre magnitudinile aparente vizuale ale acestui sistem stelar binar cu eclipsă, corespunzătoare următoarelor momente:

a) când discurile aparente ale celor două stele se suprapun complet, în variantele a și b din figura 1;

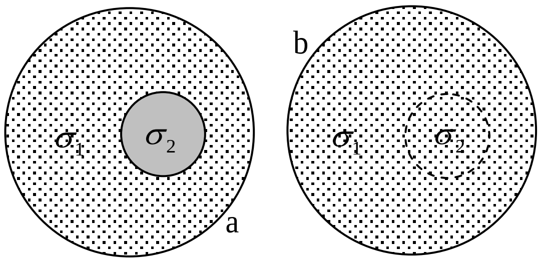


Fig. 1

b) când discurile aparente ale celor două stele sunt tangente, în variantele a și b din figura 2.

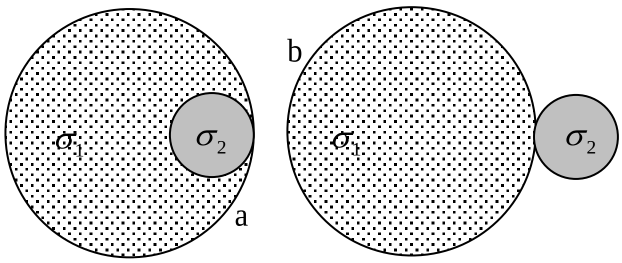


Fig. 2

Se cunosc: $(R_1;R_2<R_1)-$razele celor două stele; $(T_1;T_2)-$temperaturile absolute la suprafețele celor două stele.

Rezolvare

Utilizând formula lui Pogson, rezultă:

$$1\text{punct}\begin{cases}\log\dfrac{\Phi_{\text{masurat, a}}}{\Phi_{\text{masurat, b}}}=-0,4\left(\mathrm{m_a}-\mathrm{m_{b)}}\right);\\[2ex]\mathrm{m_a}-\mathrm{m_b}=2,5\log\dfrac{\Phi_{\text{masurat, b}}}{\Phi_{\text{masurat, a}}}.\end{cases}$$

Atunci când componentele sistemului stelar binar se eclipsează reciproc, pe durata eclipsei discurile circulare aparente ale celor două stele se suprapun, mai mult sau mai puțin, astfel încât ariile suprafețelor sectoarelor libere (ne eclipsate) ale discurilor stelare, vizibile pentru observatorul de pe Pământ, sunt ΔA_1 și respectiv ΔA_2.

Energiaradiațiilorprovenind de la sistemulstelarbinar, ajunsă la detectorulobservatorului de pe Pământ, aflat la distanța*D*, înunitatea de timpşimăsurate de acesta (fluxul energetic total măsurat), este:

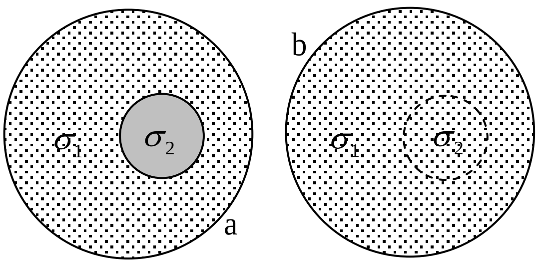
$$1\,\text{punct}\quad \Phi_{masurat} = k\left(\phi_1 \Delta A_1 + \phi_2 \Delta A_2\right),$$

unde φ_1 și respectiv φ_2 sunt densitățile fluxurilor energetice (radianțele) la suprafețele celor două stele (energiile corespunzătoare tuturor lungimilor de undă, eliberate de fiecare dintre cele două stele în unitatea de timp, de pe câte un sector a cărui suprafață are aria de o unitate;

$$1\,\text{punct}\quad \Phi_{masurat} = k'\left(\frac{L_1}{R_1^2}\Delta A_1 + \frac{L_2}{R_2^2}\Delta A_2\right);\ k' = \frac{k}{4\pi};$$

$$1\,\text{punct}\quad \Phi_{masurat} = k''\left(T_1^4 \Delta A_1 + T_2^4 \Delta A_2\right);\ k'' = k\sigma.$$

a) Corespunzător detaliilor din figura 1, rezultă:



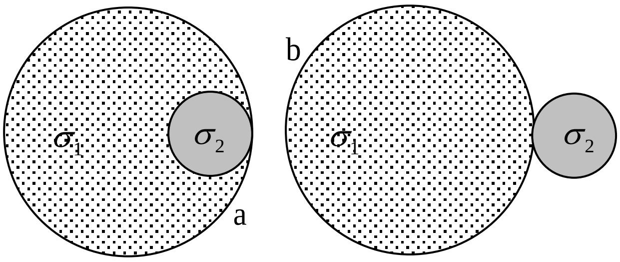
$$1\ \text{punct}\quad \begin{cases} \Delta A_{1,a} = \pi\left(R_1^2 - R_2^2\right) \\ \Delta A_{1,b} = \pi R_1^2 \end{cases}$$

$$1\ \text{punct}\quad \begin{cases} \Delta A_{2,a} = \pi R_2^2 \\ \Delta A_{2,b} = 0 \end{cases}$$

Fig. 1

1 punct
$$\begin{cases} \Phi_{masurat,a} = k''\left(T_1^4 \Delta A_{1,a} + T_2^4 \Delta A_{2,a}\right) = k''\left[T_1^4 \pi\left(R_1^2 - R_2^2\right) + T_2^4 \pi R_2^2\right]; \\ \Phi_{masurat,b} = k''\left(T_1^4 \Delta A_{1,b} + T_2^4 \Delta A_{2,b}\right) = k'' T_1^4 \pi R_1^2; \\ m_a - m_b = 2,5 \log \dfrac{T_1^4 R_1^2}{T_1^4\left(R_1^2 - R_2^2\right) + T_2^4 R_2^2}. \end{cases}$$

b) Corespunzător detaliilor din figura 2, rezultă:



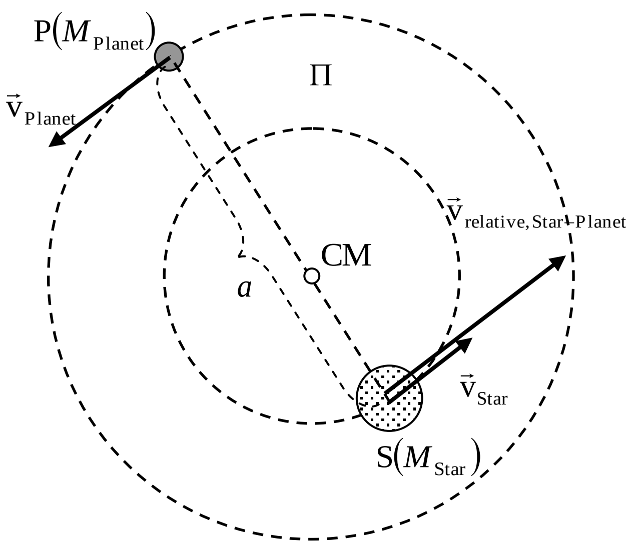
1 punct
$$\Delta A_{1,a} = \pi\left(R_1^2 - R_2^2\right) \qquad \Delta A_{2,a} = \pi R_2^2$$

$$\Delta A_{1,b} = \pi R_1^2 \qquad \Delta A_{2,b} = \pi R_2^2$$
1 punct

Fig. 2

1 punct
$$\begin{cases} \Phi_{masurat,a} = k''\left(T_1^4 \Delta A_{1,a} + T_2^4 \Delta A_{2,a}\right) = k''\left[T_1^4 \pi\left(R_1^2 - R_2^2\right) + T_2^4 \pi R_2^2\right]; \\ \Phi_{masurat,b} = k''\left(T_1^4 \Delta A_{1,b} + T_2^4 \Delta A_{2,b}\right) = k''\left(T_1^4 \pi R_1^2 + T_2^4 \pi R_2^2\right); \\ m_a - m_b = 2,5 \log \dfrac{T_1^4\left(R_1^2 - R_2^2\right) + T_2^4 R_2^2}{T_1^4 R_1^2 + T_2^4 R_2^2}. \end{cases}$$

3. În desenul din figura 1 am reprezentat steaua S, având masa M_{Star} și exoplaneta P, având masa M_{Planet}, evoluând în planul $\Pi \neq \Pi_0$ (planul cerului), pe orbite circulare concentrice, în jurul centrului lor de masă, distanța dintre centrele lor fiind a.



Să se determine vitezele celor două componente în raport cu CM, v_{Star} şi respectiv v_{Planet}, precum şi viteza stelei S în raport cu exoplaneta P, $v_{\mathrm{relative Star-Planet}}$. Se cunoaşte constanta atracţiei gravitaţionale, *K*.

Fig. 1

Rezolvare

În acord cu legile lui Kepler și Newton, pentru mișcările celor două corpuri cerești, utilizând desenul din figura 1, rezultă:

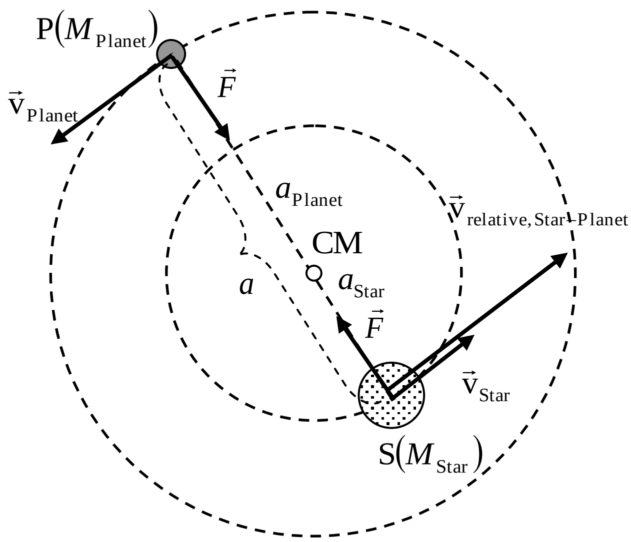


Fig. 1

0,5 p

$$v_{\mathrm{Star}} = \frac{2\pi a_{\mathrm{Star}}}{T};\ v_{\mathrm{Planet}} = \frac{2\pi a_{\mathrm{P}}}{T}\ \ldots\ a_{\mathrm{Planet}} = a;$$

0,5 p

1 p

$$M_{\mathrm{Star}} v_{\mathrm{Star}} = M_{\mathrm{Planet}} v_{\mathrm{P}}\ \ldots\ a_{\mathrm{Star}} = M_{\mathrm{Planet}} a_{\mathrm{Planet}};$$

1 p

$$a_{\mathrm{Planet}} = \frac{a M_{\mathrm{Star}}}{M_{\mathrm{Planet}} + M_{\mathrm{Star}}};\ a_{\mathrm{Star}} = \frac{a M_{\mathrm{Planet}}}{M_{\mathrm{Planet}} + M_{\mathrm{Star}}};$$

$$v_{Star} = \frac{2\pi a_{Star}}{T} = \frac{2\pi}{T}\frac{M_{Planet}}{M_{Planet}+M_{Star}}a;$$

$$a^3 = \frac{K(M_{Planet}+M_{Star})}{4\pi^2}T^2;$$

1 p

$$a = \sqrt[3]{\frac{K(M_{Planet}+M_{Star})T^2}{4\pi^2}};$$

$$v_{Star} = \frac{2\pi}{T}\frac{M_{Planet}}{M_{Planet}+M_{Star}}\sqrt[3]{\frac{K(M_{Planet}+M_{Star})T^2}{4\pi^2}};$$

$$v_{Star} = M_{Planet}\cdot\sqrt[3]{\frac{(2\pi)^3K(M_{Planet}+M_{Star})T^2}{(M_{Planet}+M_{Star})^3T^3(2\pi)^2}};$$

2 p

$$v_{Star} = M_{Planet}\cdot\sqrt[3]{\frac{2\pi K}{(M_{Planet}+M_{Star})^2T}};$$

Sau v planeta

$$\vec{v}_{relative,Star-Planet} = \vec{v}_{Star} - \vec{v}_{Planet};$$

$$v_{relative,Star-Planet} = v_{Star} + v_{Planet} = \frac{2\pi a_{Star}}{T} + \frac{2\pi a_{Planet}}{T} = \frac{2\pi}{T}(a_{Star}+a_{Planet});$$

$$v_{relative,Star-Planet} = \frac{2\pi}{T}a;$$

2 p pentru v planetă sau v star

$$a^3 = \frac{K(M_{Planet}+M_{Star})}{4\pi^2}T^2;$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2a^3}{K(M_{Planet}+M_{Star})}};$$

$$v_{relative,Star-Planet} = \frac{2\pi a}{\sqrt{\frac{4\pi^2a^3}{K(M_{Planet}+M_{Star})}}};$$

2 p

$$v_{relative,Star-Planet} = \sqrt{\frac{K(M_{Planet}+M_{Star})}{a}};$$

$$M_{\text{Star}}\,\mathrm{v}_{\text{Star}} = M_{\text{Planet}}\,\mathrm{v}_{\text{Planet}};\ M_{\text{Star}}a_{\text{Star}} = M_{\text{Planet}}a_{\text{Planet}};$$

$$\frac{\mathrm{v}_{\text{Star}}}{a_{\text{Star}}} = \frac{\mathrm{v}_{\text{Planet}}}{a_{\text{Planet}}};$$

$$\mathrm{v}_{\text{Planet}} = \frac{a_{\text{Planet}}}{a_{\text{Star}}}\mathrm{v}_{\text{Star}};$$

$$\mathrm{v}_{\text{relative, Star-Planet}} = \mathrm{v}_{\text{Star}} + \mathrm{v}_{\text{Planet}} = \mathrm{v}_{\text{Star}} + \frac{a_{\text{Planet}}}{a_{\text{Star}}}\mathrm{v}_{\text{Star}};$$

$$\mathrm{v}_{\text{relative, Star-Planet}} = \mathrm{v}_{\text{Star}}\left(1 + \frac{a_{\text{Planet}}}{a_{\text{Star}}}\right) = \frac{a_{\text{Star}} + a_{\text{Planet}}}{a_{\text{Star}}}\mathrm{v}_{\text{Star}} = \frac{a}{a_{\text{Star}}}\mathrm{v}_{\text{Star}};$$

$$\mathrm{v}_{\text{Star}} = \frac{a_{\text{Star}}}{a}\mathrm{v}_{\text{relative, Star-Planet}};$$

$$\mathrm{v}_{\text{relative, Star-Planet}} = \sqrt{\frac{K\left(M_{\text{Planet}} + M_{\text{Star}}\right)}{a}};$$

$$\mathrm{v}_{\text{Star}} = \frac{a_{\text{Star}}}{a}\sqrt{\frac{K\left(M_{\text{Planet}} + M_{\text{Star}}\right)}{a}};$$

$$a_{\text{Star}} = \frac{aM_{\text{Planet}}}{M_{\text{Planet}} + M_{\text{Star}}};\ \frac{a_{\text{Star}}}{a} = \frac{M_{\text{Planet}}}{M_{\text{Planet}} + M_{\text{Star}}};$$

$$\mathrm{v}_{\text{Star}} = \frac{M_{\text{Planet}}}{M_{\text{Planet}} + M_{\text{Star}}}\sqrt{\frac{K\left(M_{\text{Planet}} + M_{\text{Star}}\right)}{a}};$$

$$\mathrm{v}_{\text{Star}} = M_{\text{Planet}} \cdot \sqrt{\frac{K\left(M_{\text{Planet}} + M_{\text{Star}}\right)}{a\left(M_{\text{Planet}} + M_{\text{Star}}\right)^2}};$$

$$\mathrm{v}_{\text{Star}} = M_{\text{Planet}} \cdot \sqrt{\frac{K}{a\left(M_{\text{Planet}} + M_{\text{Star}}\right)}},$$

sau:

$$\frac{M_{\text{Star}}\,\mathrm{v}_{\text{Star}}^2}{a_{\text{Star}}} = K\frac{M_{\text{Star}}M_{\text{Planet}}}{a^2};$$

$$\frac{\mathrm{v}_{\text{Star}}^2}{a_{\text{Star}}} = K\frac{M_{\text{Planet}}}{a^2};$$

$$v_{Star} = \sqrt{\frac{K a_{Star} M_{Planet}}{a^2}};\ a_{Star} = \frac{a M_{Planet}}{M_{Planet} + M_{Star}} \approx \frac{a M_{Planet}}{M_{Star}};$$

$$v_{Star} = M_{Planet} \cdot \sqrt{\frac{Ka}{a M_{Star}}},$$

sau:

$$v_{Star} = M_{Planet} \cdot \sqrt[3]{\frac{2\pi K}{\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)^2 T}};$$

$$v_{Star} = M_{Planet} \cdot \sqrt[3]{\frac{2\pi K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)}{\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)^3 T}};$$

$$v_{Star} = \frac{M_{Planet}}{M_{Planet} + M_{Star}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2\pi K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)}{T}};$$

$$a^3 = \frac{K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)}{4\pi^2} T^2;\ T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)}};$$

$$v_{Star} = \frac{M_{Planet}}{M_{Planet} + M_{Star}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2\pi K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)}{\sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)}}}};$$

$$v_{Star} = \frac{M_{Planet}}{M_{Planet} + M_{Star}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2\pi K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)}{2\pi a \cdot \sqrt{\frac{a}{K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)}}}};$$

$$v_{Star} = \frac{M_{Planet}}{M_{Planet} + M_{Star}} \cdot \sqrt[3]{\frac{K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)}{a \cdot \sqrt{\frac{a}{K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)}}}};$$

$$v_{Star} = \frac{M_{Planet}}{M_{Planet} + M_{Star}} \cdot \sqrt[3]{\frac{K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)\sqrt{K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)}}{a\sqrt{a}}};$$

$$v_{Star} = \frac{M_{Planet}}{M_{Planet} + M_{Star}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\left[K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)\right]^{3/2}}{a^{3/2}}};$$

$$v_{Star} = \frac{M_{Planet}}{M_{Planet} + M_{Star}} \cdot \sqrt[3]{\left[\frac{K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)}{a}\right]^{3/2}};$$

$$v_{Star} = \frac{M_{Planet}}{M_{Planet} + M_{Star}} \left[\left(\frac{K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)}{a} \right)^{3/2} \right]^{1/3};$$

$$v_{Star} = \frac{M_{Planet}}{M_{Planet} + M_{Star}} \sqrt{\frac{K\left(M_{Planet} + M_{Star}\right)}{a}};$$

$$M_{Planet} << M_{Star};$$

$$v_{Star} \approx \frac{M_{Planet}}{M_{Star}} \sqrt{\frac{KM_{Star}}{a}};$$

$$v_{Star} = M_{Planet} \sqrt{\frac{K}{aM_{Star}}},$$

reprezentând viteza stelei S în raport cu CM;

$$M_{Star}\, v_{Star} = M_{Planet}\, v_{Planet};\ v_{Planet} = \sqrt{\frac{KM_{Star}}{a}},$$

reprezentând viteza exoplanetei P în raport cu CM.