



# Olimpiada Națională de Astronomie și Astrofizică Craiova 2016

## Analiza datelor

# J

### ADJ1.

În această problemă veți avea de estimat, folosind datele obținute prin măsurători astronomice, valoarea constantei atracției universale. Pentru aceasta va trebui să răspunzi la următoarele întrebări:

1. Definește parametrii geometrici ai elipsei și scrie relația care definește excentricitatea elipsei în funcție de parametrii definiți.
2. Variația energiei potențiale gravitaționale a unui corp de masă  $m$  (o cometă), care se deplasează liber de la distanța  $r_0$  până la distanța  $r_f$ , numai sub acțiunea interacțiunii gravitaționale cu un corp ceresc de masă  $M$  (**Soarele**) este dată de relația:

$$\Delta E_p = k \cdot m \cdot M \cdot \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_f} \right)$$

Distanțele  $r_0$  și  $r_f$  sunt măsurate de la corpul ceresc (**Soare**).

Calculează energia potențială a cometei aflată la o distanță oarecare  $r$  de Soare. Justifică răspunsul obținut.

3. Scrie expresia energiei totale a sistemului Soare cometă, presupunând că masa cometei este mult mai mică decât masa Soarelui. Dacă traiectoria cometei este o elipsă, cum va fi energia totală a sistemului - mai mică decât zero, egală cu zero sau pozitivă ?. Descrie raționamentul făcut de tine.
4. Dedu formula vitezei cometei pe traiectorie, ca relație de distanța  $r$  până la Soare, știind că valoarea absolută a energiei totale a sistemului este

$$E = \frac{k \cdot m \cdot M}{2} \cdot \frac{1}{a}$$

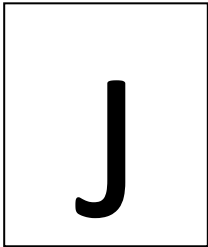
### Și acum analiza datelor

5. În tabelul de mai jos sunt date valorile vitezei unei comete în funcție de distanța de la aceasta la Soare. Semiaxa mare a traiectoriei cometei este  $a = 17,8$  UA. Masa Soarelui  $M = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$

$v(\text{m/s})$	$r (10^{12} \text{ m})$
915	5,25
5101	3,52
8741	2,10
18444	0,68
13220	1,18
7860	2,34
4760	3,67



# Olimpiada Națională de Astronomie și Astrofizică Craiova 2016



## Analiza datelor

Folosind datele și, obligatoriu, foaia de hârtie milimetrică, determină valoarea constantei atracției gravitaționale. Te rugăm ca pe foaia de concurs să scrii cât mai citeț tabelul valorilor pe care le vei reprezenta grafic.

Calculează eroarea relativă a rezultatului obținut, dacă știi că valoarea acceptată a constantei atracției gravitaționale este:

$$k = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$$

### Rezolvare

1. a- semiaxa mare, b- semiaxa mica, c- distanta de la originea sistemului de referinta la focar, e- excentricitatea elipsei = c/a, distanta focar - periheliu = a(1-e), distanta focar afeliu = a(1+e),

$$6 \times 0,25 \text{ p} = 1,5 \text{ p}$$

2

$$E_p = -k \cdot \frac{mM}{r} \quad 0,75 \text{ p}$$

Se obține pentru  $r_f$  tinzând la infinit unde energia potențială este zero

$$0,25 \text{ p}$$

3

$$E_t = \frac{m \cdot v^2}{2} - k \cdot \frac{mM}{r} \quad 0,75 \text{ p}$$

Energia totală este negativă fiind un sistem legat  $0,25 \text{ p}$

$$4. \quad v^2 = k \cdot m \cdot M \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad 1 \text{ p}$$

5 Se reprezintă grafic  $v^2$  în funcție de  $1/r$ . Din panta graficului se determină k

v	r	v patrat	2/r-1/a	
915	5,25	837225	-3,753481279E-10	1,5 p
5101	3,52	26020201	-3,752545132E-10	
8741	2,1	76405081	-3,750624137E-10	
18444	0,678	3,4E+08	-3,740636779E-10	
13220	1,18	1,75E+08	-3,746911465E-10	
7860	2,34	61779600	-3,751112537E-10	

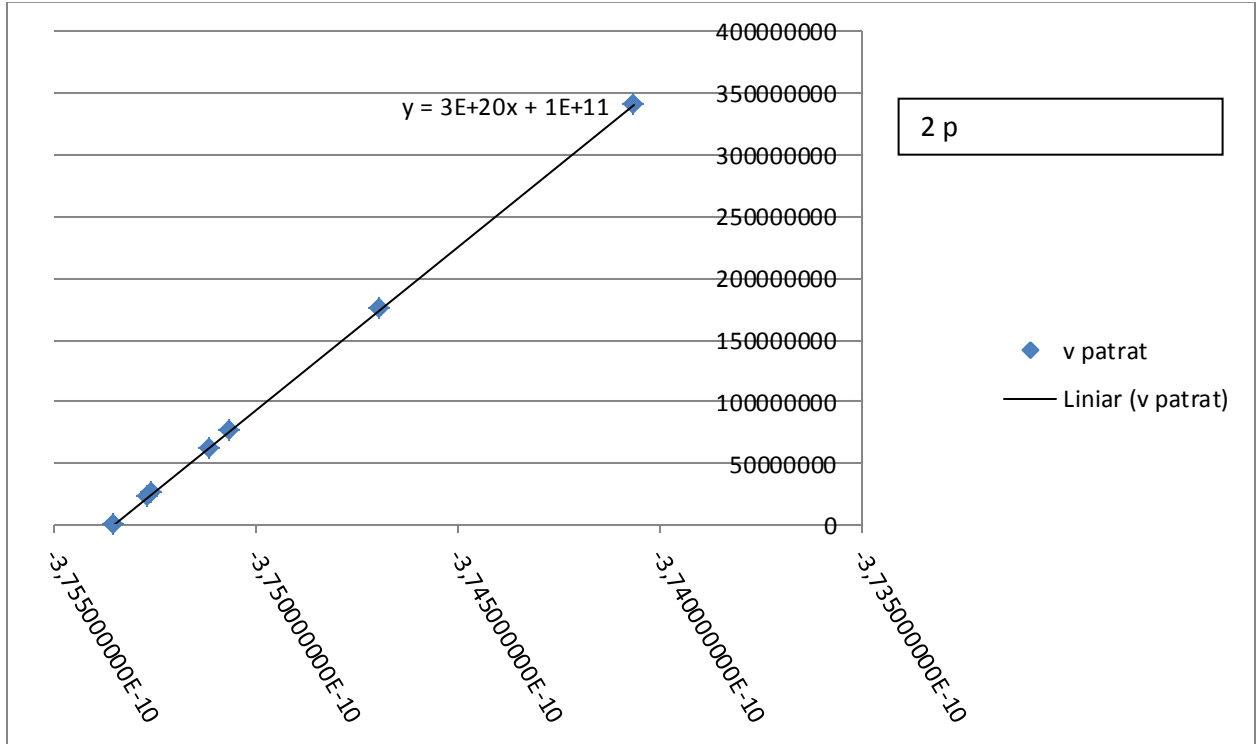


Olimpiada Națională de Astronomie și Astrofizică  
Craiova 2016

J

Analiza datelor

4760    3,67    22657600     $-3,752661246E-10$



$k=7,537688 E-11$

1,5 p

eroarea relativă 12,96%

0,5 p

DAJ2.

Jules Verne „Hector Servadac în lumea solară”. In romanul lui Jules Verne „Hector Servadac – Călătorii și aventuri în lumea solară”, în urma coliziunii Pământului cu o cometă, o porțiune foarte mică de masă  $m$  din Pământ „se lipește” de cometă și odată cu aceasta și câțiva locuitori din zona respectivă. Aceștia trăiesc aventura unei colonii aflate pe cometă ca pe un



# Olimpiada Națională de Astronomie și Astrofizică Craiova 2016

## Analiza datelor

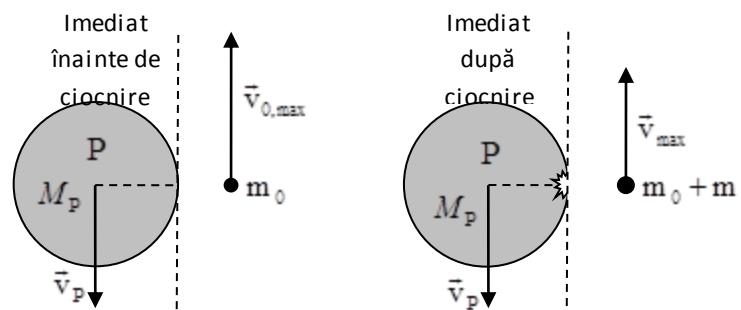
# J

Pământ mai mic. Ești unul dintre supraviețuitorii coloniei de pe cometă și de rezolvarea problemei depinde reîntoarcerea coloniei pe Pământ.

Mai întâi câteva presupuneri:

1. Ciocnirea are loc atunci când viteza cometei pe traiectorie era maximă și direcția ei este paralelă cu viteza Pământului.
2. Orbita Pământului, presupusă circulară nu este afectată de desprinderea fragmentului de masă  $m$ .
3. Se cunosc: masa cometei,  $m_0 \ll M_p$  unde  $M_p$  este masa Pământului; masa fragmentului dislocat din Pământ,  $m \ll M_p$ ,  $e_0$  excentricitatea elipsei pe care se deplasa cometa rătăcită, înainte de impactul cu Pământul;  $r_p$  raza orbitei circulare a Pământului în jurul Soarelui; raza Pământului,  $R_p \ll r_p$ . Se știe că planul orbitei cometei este același cu planul orbitei Pământului.
4. Viteza Pământului, precum și masa acestuia, nu sunt afectate semnificativ de impactul cu cometa.

**Și o indicație:** O mărime fizică importantă, care te va ajuta în rezolvarea problemei este impulsul numită și „cantitate de mișcare de translație”. Impulsul unui corp este o mărime fizică vectorială egală cu produsul dintre masa corpului și vectorul viteză. Pentru un sistem izolat format din două corpuri care interacționează, impulsul total este suma vectorilor impuls ai celor două corpuri și, rămâne constant chiar și după ce corpurile se ciocnesc.



Calculează:

- a. În care punct de pe traiectoria cometei are loc coliziunea;
- b. Care este viteza cometei după ciocnire;
- c. Semiaxa mare  $a$  și excentricitatea  $e$  a traiectoriei cometei după ciocnire. În mișcarea cometei pe elipsă, se știe că: distanța minimă față de Soare este:

$$r_{\min} = a(1-e), \text{ iar viteza maximă este } v_{\max} = \sqrt{K \cdot M_s \cdot \frac{1+e}{a \cdot (1-e)}}$$

- d. Care va fi intervalul de timp minim măsurat în ani pe Cometă, după care, așa cum se afirmă în roman, cometa va întâlni din nou Pământul, astfel încât după



# Olimpiada Națională de Astronomie și Astrofizică Craiova 2016

## Analiza datelor

# J

ciocnire oamenii revin pe Pământ printr-un proces ipotetic reversibil celui care a produs desprinderea.

### Rezolvare

a) În romanul său, „*Hector Servadac – Călătorii și aventuri în lumea solară*”, Jules Verne imaginează fapte și întâmplări, pornind de la ipoteza întâlnirii dintre Pământ și o cometă.

În desenul din figura alăturată sunt prezentate: orbita circulară a Pământului în jurul Soarelui și orbita eliptică a cometei C, având semiaxele  $a_0$  și respectiv  $b_0$ , în al cărei focar se află Soarele, înainte de întâlnirea acestora. Pentru ca să fie posibilă întâlnirea Pământului cu cometa este necesar ca Periheliul orbitei cometei să se afle pe orbita circulară a Pământului.

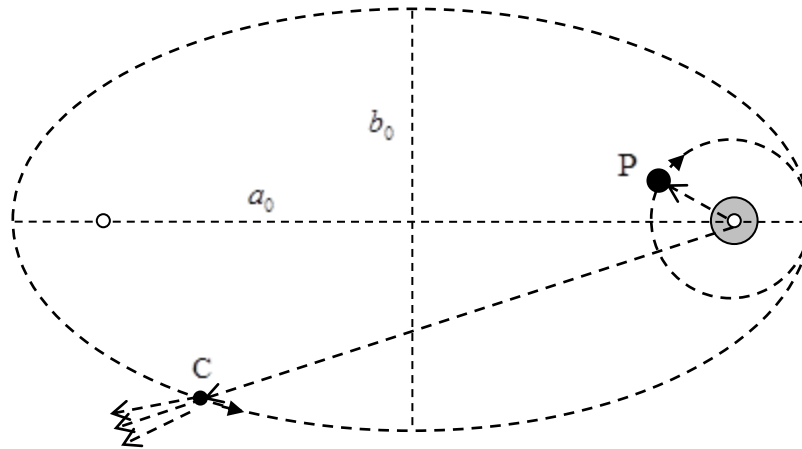
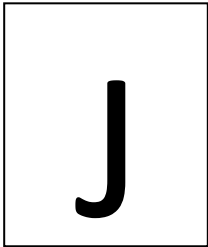


Fig.

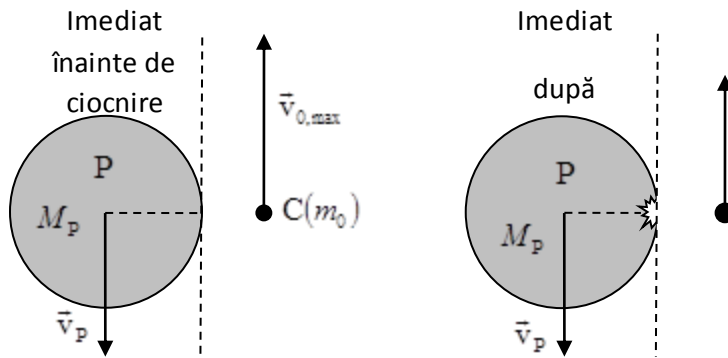
Întâlnirea celor două corpuri cerești s-a făcut în condițiile precizate de desenul din figura alăturată, la **periheliul orbitei cometei**, deplasându-se în sensuri opuse, astfel încât cometa a atins, prin tangență, suprafața Pământului. Notății:  $M_P$  – masa Pământului;  $\vec{v}_P$  – viteza Pământului;  $m_0$  – masa cometei înainte de interacțiunea cu Pământul,  $m_0 \ll M_P$ ;  $\vec{v}_{0,\max}$  – viteza cometei la Periheliu, înainte de interacțiunea cu Pământul;  $m$  – masa fragmentului dislocat de cometă din Pământ în momentul impactului,  $m \ll M_P$ ;  $\vec{v}_{\max}$  – viteza cometei Galia, după atașarea fragmentului smuls din Pământ.



**Olimpiada Națională de Astronomie și Astrofizică  
Craiova 2016**



**Analiza datelor**



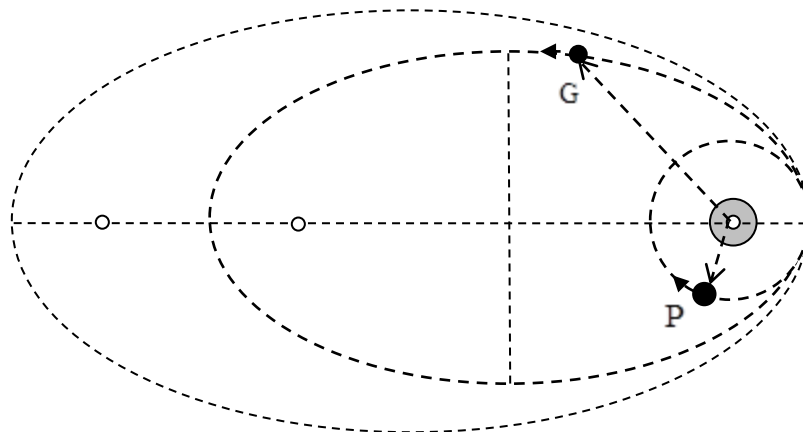
**Fig.**

**b.** Admițând că viteza Pământului, precum și masa acestuia, nu sunt afectate semnificativ de impactul cu cometa, din legea conservării impulsului, rezultă:

$$M_P v_P - m_0 v_{0,max} = M_P v_P - (m_0 + m) v_{max} ; \quad 1p$$

$$v_{max} = \frac{m_0}{m_0 + m} \cdot v_{0,max} < v_{0,max} , \quad 1p$$

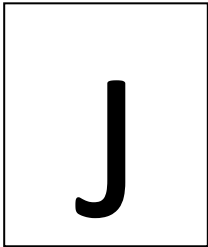
astfel încât, după formarea sa, noua cometă (Galia) își va continua drumul, gravitând în jurul Soarelui pe o nouă orbită eliptică, cu același focar, dar cu alte semiaxe ( $a; b$ ), așa cum indică desenul din figura alăturată, în timp ce Pământul își va continua mișcarea în jurul Soarelui, pe aceeași orbită circulară.



1p



**Olimpiada Națională de Astronomie și Astrofizică  
Craiova 2016**



**Analiza datelor**

Fig.

- a. Evoluția cometei pe elipsele inițială și respectiv finală, reprezentate în desenul din figura alăturată, presupune că:

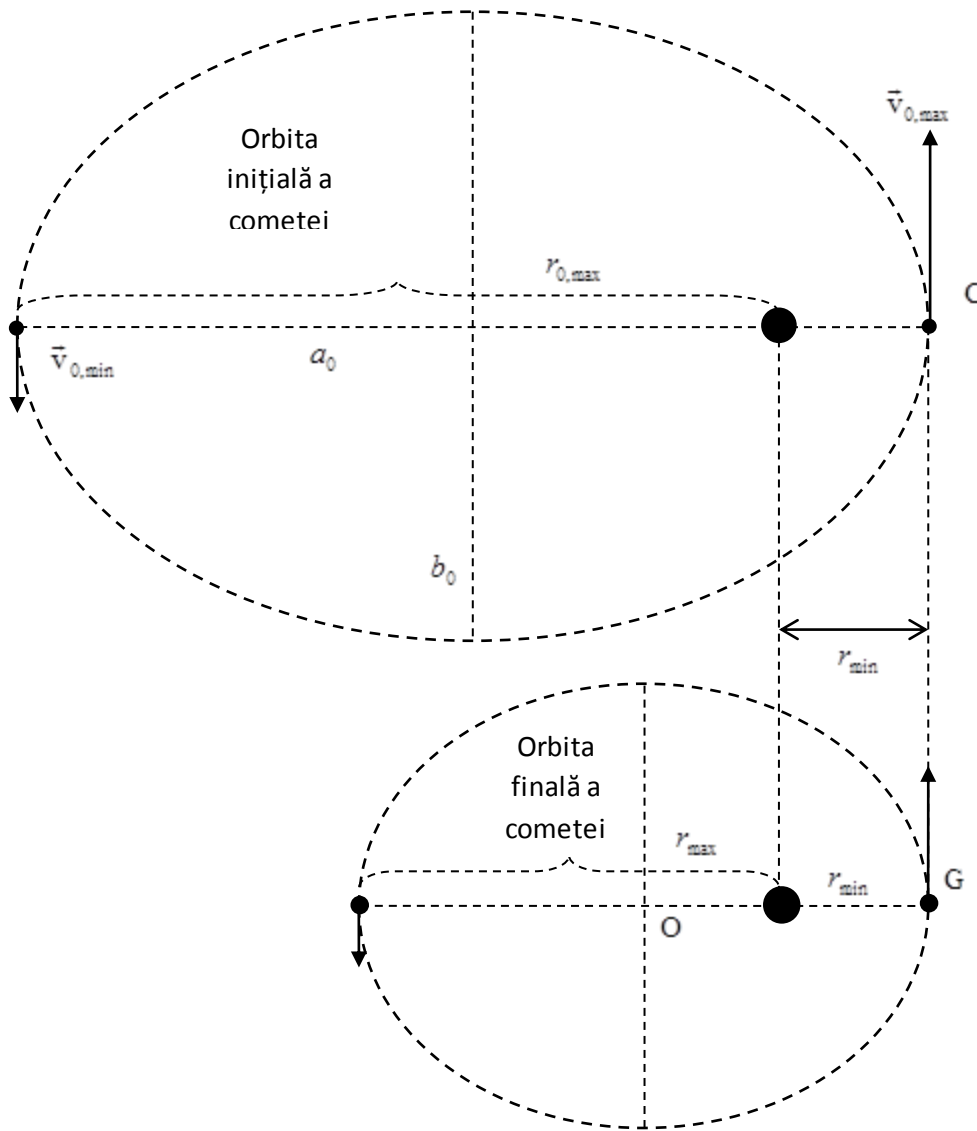


Fig.

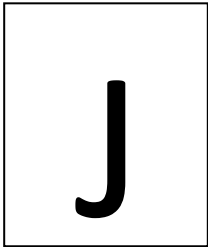
1p

$$r_{0,\min} = a_0(1 - e_0); r_{0,\min} = r_p = 1 \text{ UA};$$

$$v_{0,\max} = \sqrt{KM_S \frac{1 + e_0}{a_0(1 - e_0)}}; e_0 = \sqrt{1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}};$$



## Olimpiada Națională de Astronomie și Astrofizică Craiova 2016



### Analiza datelor

$$v_{0,\max} = \sqrt{KM_S \frac{1+e_0}{a_0(1-e_0)}} = \sqrt{KM_S \frac{1+e_0}{\frac{r_p}{1-e_0}(1-e_0)}} = \sqrt{KM_S \frac{1+e_0}{r_p}};$$

$$r_{\min} = a(1-e); \quad v_{\max} = \sqrt{KM_S \frac{1+e}{a(1-e)}}; \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}};$$

$$v_{\max} = \frac{m_0}{m_0 + m} \cdot v_{0,\max};$$

Din problemă rezultă  $r_{0,\min} = r_{\min}$ ;

$$a_0(1-e_0) = a(1-e) = r_p;$$

$$a = a_0 \frac{1-e_0}{1-e} = \frac{r_p}{1-e}; \quad 1-e = \frac{r_p}{a};$$

$$v_{\max} = \sqrt{KM_S \frac{1+e}{a(1-e)}} = \sqrt{KM_S \frac{1+e}{\frac{r_p}{1-e}(1-e)}} = \sqrt{KM_S \frac{1+e}{r_p}};$$

$$\sqrt{KM_S \frac{1+e}{r_p}} = \frac{m_0}{m_0 + m} \cdot v_{0,\max};$$

$$\sqrt{KM_S \frac{1+e}{r_p}} = \frac{m_0}{m_0 + m} \cdot \sqrt{KM_S \frac{1+e_0}{r_p}};$$

$$1+e = \frac{m_0^2}{(m_0 + m)^2} (1+e_0);$$

$$e = \frac{m_0^2}{(m_0 + m)^2} (1+e_0) - 1;$$

$$1-e = \frac{r_p}{a} + 1;$$

$$2 = \frac{r_p}{a} + \frac{m_0^2}{(m_0 + m)^2} (1+e_0);$$

$$a = \frac{r_p}{2 - \frac{m_0^2}{(m_0 + m)^2} (1+e_0)}, \quad 2p$$

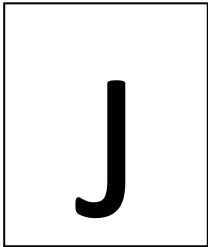
d. perioada rotației cometei Galia în jurul Soarelui este:

$$T_G = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{KM_S}} = 2\pi \sqrt{\frac{r_p^3}{KM_S \left[ 2 - \frac{m_0^2}{(m_0 + m)^2} (1+e_0) \right]^3}}; \quad 1p$$





# Olimpiada Națională de Astronomie și Astrofizică Craiova 2016



## Analiza datelor

$$T_p = 2\pi \sqrt{\frac{r_p^3}{KM_s}}$$

reprezentând perioada rotației Pământului în jurul Soarelui;

$$T_G = \frac{T_p}{\left[2 - \frac{m_0^2}{(m_0 + m)^2} (1 + e_0)\right]^{3/2}}; \quad 0,5 \text{ p}$$

$$v_p = \frac{n_p}{t} = \frac{1}{T_p}; \quad v_G = \frac{n_G}{t} = \frac{1}{T_G};$$

$$\frac{n_p}{n_G} = k = \text{număr întreg};$$

$$\frac{n_p}{n_G} = k = \frac{T_G}{T_p} = \frac{1}{\left[2 - \frac{m_0^2}{(m_0 + m)^2} (1 + e_0)\right]^{3/2}}. \quad 1 \text{ p}$$

Intervalul de timp pentru reîntâlnire va fi minim, dacă cele două corpuri se vor reîntâlni după o rotație completă a cometei Galia în jurul Soarelui, astfel încât numărul rotațiilor Pământului până la reîntâlnirea cu cometa Galia se calculează astfel:

$$2 - \frac{m_0^2}{(m_0 + m)^2} (1 + e_0) = \frac{1}{\sqrt[3]{k^2}} = \frac{1}{k^{2/3}};$$

$$\frac{n_p}{n_G} = k; \quad n_p = kn_G; \quad n_G = 1; \quad n_p = k; \quad 1 \text{ p}$$

$$n_p = \frac{1}{\left[2 - \frac{m_0^2}{(m_0 + m)^2} (1 + e_0)\right]^{3/2}}.$$