Subiectul I – Probleme Scurte

Problema 1. Supernova 2 p

În acord cu *legea lui Hubble*, viteza unei galaxii în expansiune este direct proporțională cu distanța până la aceasta, fiind dată de expresia:

$$\mathrm{v} = HL \qquad \textbf{0,5 p}$$

unde L este distanța până la galaxia respectivă și H este constanta lui Hubble. Legea lui Hubble este o consecință imediată a expansiunii uniforme a universului. În evoluția universului, constanta lui Hubble variază în timp. Se acceptă valori ale sale:

$$H = (50 \div 100)\frac{\mathrm{km/s}}{\mathrm{Mpc}}.$$

Pentru $H = 71\frac{\mathrm{km/s}}{\mathrm{Mpc}}$ și $\Delta = 2{,}5 \cdot 10^3$ Mpc, găsim:

$$\mathrm{v} \approx 180.000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 0{,}6\,c \qquad \textbf{0,25 p}$$

unde c este viteza luminii în vid.

Din studiul efectului Doppler, deplasarea spre roșu însemnează:

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}; \qquad \textbf{0,5 p}$$

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1+\frac{\mathrm{v}}{c}}{1-\frac{\mathrm{v}}{c}}} - 1 = \sqrt{\frac{1+0{,}6}{1-0{,}6}} - 1 = 1 \qquad \textbf{0,25 p}$$

utilizând informațiile din enunțul problemei, precum și diagrama Hubble dată, rezultă:

$$m - M \approx 44^{\mathrm{m}}; \qquad \textbf{0,25 p}$$

$$m = M + 44^{\mathrm{m}} = 44^{\mathrm{m}} - 19^{\mathrm{m}},5 = 24^{\mathrm{m}},5. \qquad \textbf{0,25 p}$$

Problema 2. Durata unei zile pe Marte

Datorită rotației proprii, Marte își expune treptat spre Soare întreaga suprafață, astfel încât, pentru un observator de pe suprafața planetei Marte, există alternanța zi – noapte, cu o durată diferită de aceea a alternanței zi – noapte de pe Pământ.

Dacă T_{M} este durata rotației lui Marte în jurul axei proprii (durata unei zile siderale pe planeta Marte), atunci, din enunțul problemei știm că:

$$T_{\mathrm{M}} = T_{\mathrm{P}} + \eta T_{\mathrm{P}} = 1{,}025 \text{ zile marțiene.}$$

În desenul din **figura 2** este reprezentat sistemul Soare – Marte, la momentele t_0 și respectiv t, atunci când, pentru observatorul aflat în repaus pe suprafața lui Marte, începe noaptea marțiană (când observatorul intră în sectorul întunecat; apusul Soarelui; poziția $\mathrm{A_0}$) și la sfârșitul nopții marține (când observatorul iese din sectorul întunecat și intră în sectorul luminat; răsăritul Soarelui; poziția A). Sunt evidențiate pozițiile lui Marte în raport cu Soarele la cele două momente considerate.

În intervalul de timp $\Delta t = t - t_0$ direcția Soare – Marte s-a rotit cu unghiul $\Delta\alpha = \omega_{\mathrm{MS}}\Delta t$, unde ω_{MS} este viteza unghiulară a lui Marte în mișcarea sa circulară efectuată în jurul Soarelui, iar raza vectoare a observatorului, $\vec{r}$, în raport cu centrul lui Marte, s-a rotit cu unghiul $\Delta\beta = \omega_{\mathrm{M}}\Delta t$, unde ω_{M}

este viteza unghiulară a rotației proprii a lui Marte. Evident și unghiul cu care s-a rotit linia de separare (terminatorul) dintre cele două zone (luminată și respectiv întunecată) de pe suprafața lui Marte, în același interval de timp, Δt, este $\Delta\alpha$.

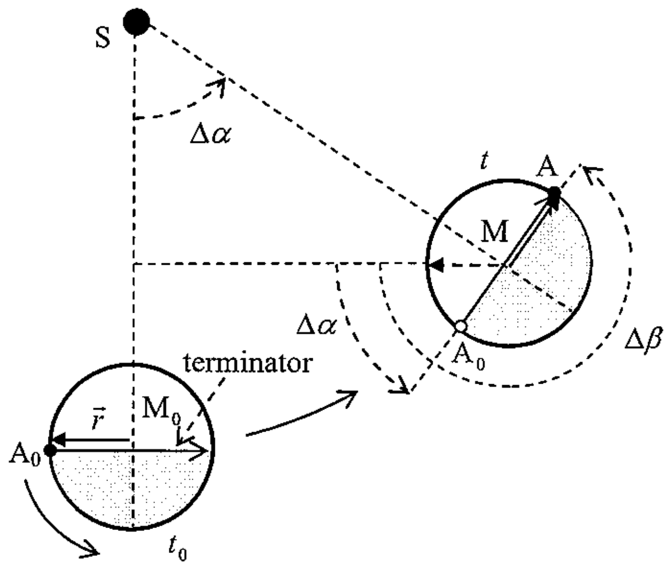


figura 1

Observatorul va ieși din noaptea marțiană, atunci când $\Delta\beta - \Delta\alpha = \pi$. În aceste condiții, rezultă:

$$\omega_M \Delta t - \omega_{MS} \Delta t = \pi;$$

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_M - \omega_{MS}} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_{MS}}} = \frac{T_M T_{MS}}{2(T_{MS} - T_M)} \approx 0{,}513 \text{ zile terestre.}$$

În desenul din **figura 3** alăturată este reprezentat sistemul Soare – Marte, la momentele t_0 și respectiv t, atunci când, pentru observatorul aflat în repaus pe suprafața lui Marte, începe ziua marțiană (intră în sectorul luminat; răsăritul Soarelui; poziția A_0) și la sfârșitul zilei marține (iese din sectorul luminat și intră în sectorul întunecat; apusul Soarelui; poziția A). Sunt evidențiate pozițiile lui Marte în raport cu Soarele la cele două momente considerate.

În intervalul de timp $\Delta t = t - t_0$ direcția Soare – Marte s-a rotit cu unghiul $\Delta\alpha = \omega_{MS}\Delta t$, unde ω_{MS} este viteza unghiulară a lui Marte în mișcarea sa circulară efectuată în jurul Soarelui, iar raza vectoare a observatorului, $\vec{r}$, în raport cu centrul lui Marte, s-a rotit cu unghiul $\Delta\beta = \omega_M \Delta t$, unde ω_M este viteza unghiulară a rotației proprii a lui Marte. Evident și unghiul cu care s-a rotit linia de separare (terminatorul) dintre cele două zone (luminată și respectiv întunecată) de pe suprafața lui Marte, în același interval de timp, Δt, este $\Delta\alpha$.

Observatorul va ieși din ziua marțiană, atunci când $\Delta\beta - \Delta\alpha = \pi$. În aceste condiții, rezultă:

$$\omega_M \Delta t - \omega_{MS} \Delta t = \pi;$$

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_M - \omega_{MS}} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_{MS}}} = \frac{T_M T_{MS}}{2(T_{MS} - T_M)} \approx 0{,}513 \text{ zile terestre.}$$

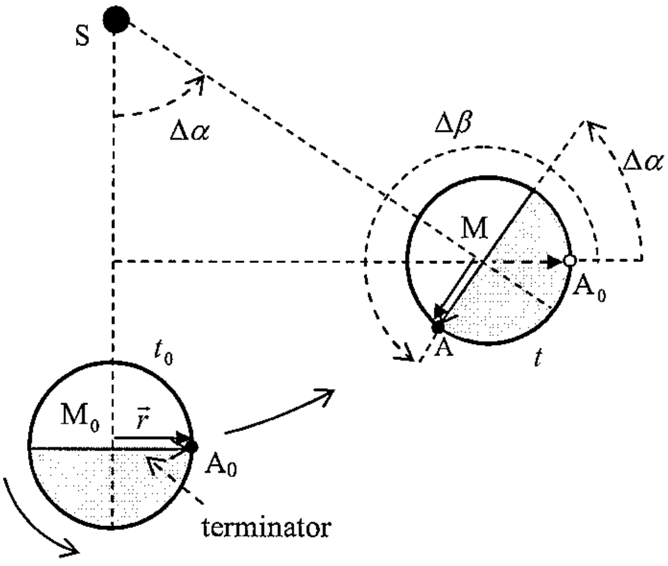


figura 2

În desenul din **figura 4** alăturată este reprezentat sistemul Soare – Marte, la momentele t_0 și respectiv t, atunci când, pentru observatorul aflat în repaus pe suprafața lui Marte, începe ziua marțiană (intră în sectorul luminat; primul răsărit al Soarelui; poziția A_0) și la sfârșitul nopții marține (iese din sectorul întunecat și intră din nou în sectorul luminat; al doilea răsărit al Soarelui; poziția A). Sunt evidențiate pozițiile lui Marte în raport cu Soarele la cele două momente considerate.

În intervalul de timp $\Delta t = t - t_0$ direcția Soare – Marte s-a rotit cu unghiul $\Delta\alpha = \omega_{MS}\Delta t$, unde ω_{MS} este viteza unghiulară a lui Marte în mișcarea sa circulară efectuată în jurul Soarelui, iar raza vectoare a observatorului, $\vec{r}$, în raport cu centrul lui Marte, s-a rotit cu unghiul $\Delta\beta = \omega_M\Delta t$, unde ω_M este viteza unghiulară a rotației proprii a lui Marte. Evident și unghiul cu care s-a rotit linia de separare (terminatorul) dintre cele două zone (luminată și respectiv întunecată) de pe suprafața lui Marte, în același interval de timp, Δt, este $\Delta\alpha$.

Observatorul va reîncepe ziua marțiană, atunci când $\Delta\beta - \Delta\alpha = 2\pi$. În aceste condiții, rezultă:

$$\omega_M\Delta t - \omega_{MS}\Delta t = 2\pi;$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_M - \omega_{MS}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_M} - \frac{2\pi}{T_{MS}}} = \frac{T_M T_{MS}}{(T_{MS} - T_M)} \approx 1{,}026 \text{ zile terestre;}$$

$$\Delta t = 1{,}026 \cdot 24\text{ h} = 24{,}6\text{ h} = 24\text{ h } 36\text{ min},$$

reprezentând durata zilei siderale pe Marte (durata unei rotații complete a lui Marte în jurul propriei axe);

1 zi siderală Marte = 24 h 36 min.

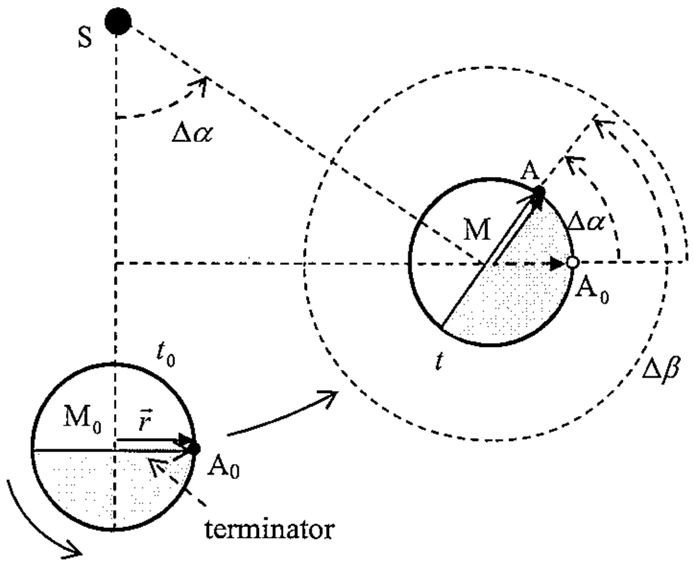


figura 3

Se numește *an tropic* pe Pământ/Marte, intervalul de timp, măsurat de pe Pământ/Marte, dintre două treceri consecutive ale Soarelui, în mișcarea sa anuală aparentă pe ecliptică, prin punctul vernal γ, sau, ceea ce este echivalent, intervalul de timp necesar Pământului/Marte, în mișcarea sa de rotație în jurul Soarelui, să revină în același echinocțiu.

Pentru observatorul de pe Pământ:

1 an tropic pe Pământ = 365,2422 zile solare medii terestre = 366,2422 zile siderale terestre.

Pentru observatorul de pe Marte:

1 an tropic pe Marte = 687 zile solare medii marțiene = 688 zile siderale marțiene,

ceea ce înseamnă că, atât pe Pământ, cât și pe Marte, numărul zilelor siderale dintr-un an tropic este cu 1 mai mare decât numărul zilelor solare medii;

$$1 \text{ an tropic pe Pământ} \neq 1 \text{ an tropic pe Marte};$$

$$687 \cdot 1 \text{zi solară medie pe Marte} = 688 \cdot 1 \text{zi siderală pe Marte};$$

$$1 \text{ zi solară medie pe Marte} = \frac{688}{687} \cdot 1 \text{zi siderală pe Marte};$$

$$1 \text{ zi solară medie pe Marte} = \frac{688}{687} \cdot 24{,}6 \text{ h} \approx 24{,}635 \text{ h} = 24 \text{ h } 38 \text{ min},$$

astfel încât:

$$1 \text{ zi solară medie pe Marte} > 1 \text{ zi siderală pe Marte};$$

1 zi solară medie pe Marte - 1 zi siderală pe Marte = 24 h 38 min – 24 h 36 min = 2 min.

$T_M = T_P + \eta T_P = 1{,}025 z.m.$ **0,1 p**

Exprimarea corectă a unghiurilor (desen) **0,5 p**

$\Delta\alpha = \omega_{st}\Delta t$

$\Delta\beta = \omega_M \Delta t$

Condiția $\Delta\beta - \Delta\alpha = \pi \Rightarrow \Delta t = \dfrac{T_M T_{MS}}{2(T_{MS} - T_M)} = 0{,}513 \ zile \ P$ (calcul numeric) **0,1 p**

Exprimarea corectă a unghiurilor (desen) **0,5 p**

Calculul intervalului după care obs. va ieși din ziua marțiană

$\Delta t = 0{,}513 \ zile\, p$ **0,1 p**

An tropic pentru observatorul de pe Pământ	0,2 p
An tropic pentru observatorul de pe Marte	0,2 p
Calculul diferenței dintre zilele siderale $\Delta t = 2\,minute$	0,3 p

Problema 3. Soarele în Zodiac

În mișcările lor aparente, Luna și celelalte planete mari din sistemul nostru solar nu se îndepărtează mult de planul eclipticii. Traiectoriile lor aparente descrise pe sfera cerească rămân cuprinse într-o regiune care se întinde simetric de ambele părți ale eclipticii, având lățimea totală de aproximativ 18°, denumită *zodiac*, așa cum indică desenul din enunțul problemei.

Stelele de pe sfera cerească cuprinse în „banda" zodiacului au fost grupate în 12 constelații, denumite *constelații zodiacale* (Berbecul, Taurul, Gemenii, Racul, Leul, Fecioara, Balanța, Scorpionul, Capricornul, Vărsătorul, Peștii), fiecare dintre ele având însă întinderi neegale de-a lungul eclipticii.

Zodiacul a fost împărțit apoi în 12 sectoare identice, fiecare cu întinderea de 30° de-a lungul eclipticii, în așa fel încât în fiecare sector să se afle cea mai mare parte a uneia dintre constelațiile zodiacale, căreia i s-a atașat apoi un semn zodiacal. Durata evoluției Soarelui adevărat în fiecare din cele 12 constelații ale Zodiacului este: 1) Berbecul, 21 III – 20 IV; 2) Taurul, 21 IV – 20 V; 3) Gemenii, 21 V – 20 VI; 4) Racul, 21 VI – 22 VII; 5) Leul, 23 VII – 22 VIII; 6) Fecioara, 23 VIII – 22 IX; 7) Balanța, 23 IX – 22 X; 8) Scorpionul, 23 X – 21 XI; 9) Săgetătorul, 22 XI – 21 XII; 10) Capricornul, 22 XII – 21 I; 11) Vărsătorul, 22 I – 19 II; 12) Peștii, 20 II – 21 III.

În desenele din figura alăturată sunt evidențiate: mișcarea relativă a Pământului în raport cu Soarele considerat fix; mișcarea relativă a Soarelui în raport cu Pământul considerat fix. Cele două mișcări sunt identice!

Orbita mișcării relative a Pământului în raport cu Soarele (o elipsă, având Soarele în unul dintre focare), însemnează locul geometric al extremităților vectorilor de poziție $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ...)$. Sunt evidențiate momentele trecerii Pământului prin pozițiile extreme (3 ianuarie – Periheliu; 4 iulie – Apheliu), precum și vitezele Pământului, corespunzătoare acestor poziții. Mișcarea relativă a Pământului în jurul Soarelui este o mișcare neuniformă.

Se construiesc vectorii concurenți $(-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, -\vec{r}_3, ...)$. Locul geometric al extremităților acestor vectori de poziție însemnează orbita mișcării relative a Soarelui în raport cu Pământul (o elipsă având Pământul în unul dintre focare). Sunt evidențiate momentele trecerii Soarelui prin pozițiile extreme (3 ianuarie – Perigeu; 4 iulie – Apogeu), precum și vitezele aparente ale Soarelui, corespunzătoare acestor poziții. Mișcarea relativă a Soarelui în jurul Pământului este o mișcare neuniformă.

Dacă Soarele "adevărat", S_a, însemnează proiecția pe sfera cerească geocentrică a Soarelui real, S, atunci, în desenul din figura alăturată, este prezentată mișcarea anuală aparentă a Soarelui „adevărat". Ea se desfășoară pe cercul mare numit "ecliptică", aflat în planul „eclipticii".

În mișcarea sa relativă în raport cu Pământul, viteza unghiulară a Soarelui este variabilă, fiind maximă la Perigeu și minimă la Apogeu. În aceste condiții și viteza unghiulară a Soarelui adevărat, în mișcarea sa aparentă anuală pe ecliptică este variabilă, fiind maximă în punctul de pe linia apsidelor corespunzător Perigeului $(\omega_{max} \approx 61{,}2'/zi)$ și minimă în punctul de pe linia apsidelor corespunzător Apogeului $\omega_{min} = 57{,}2'/zi$.

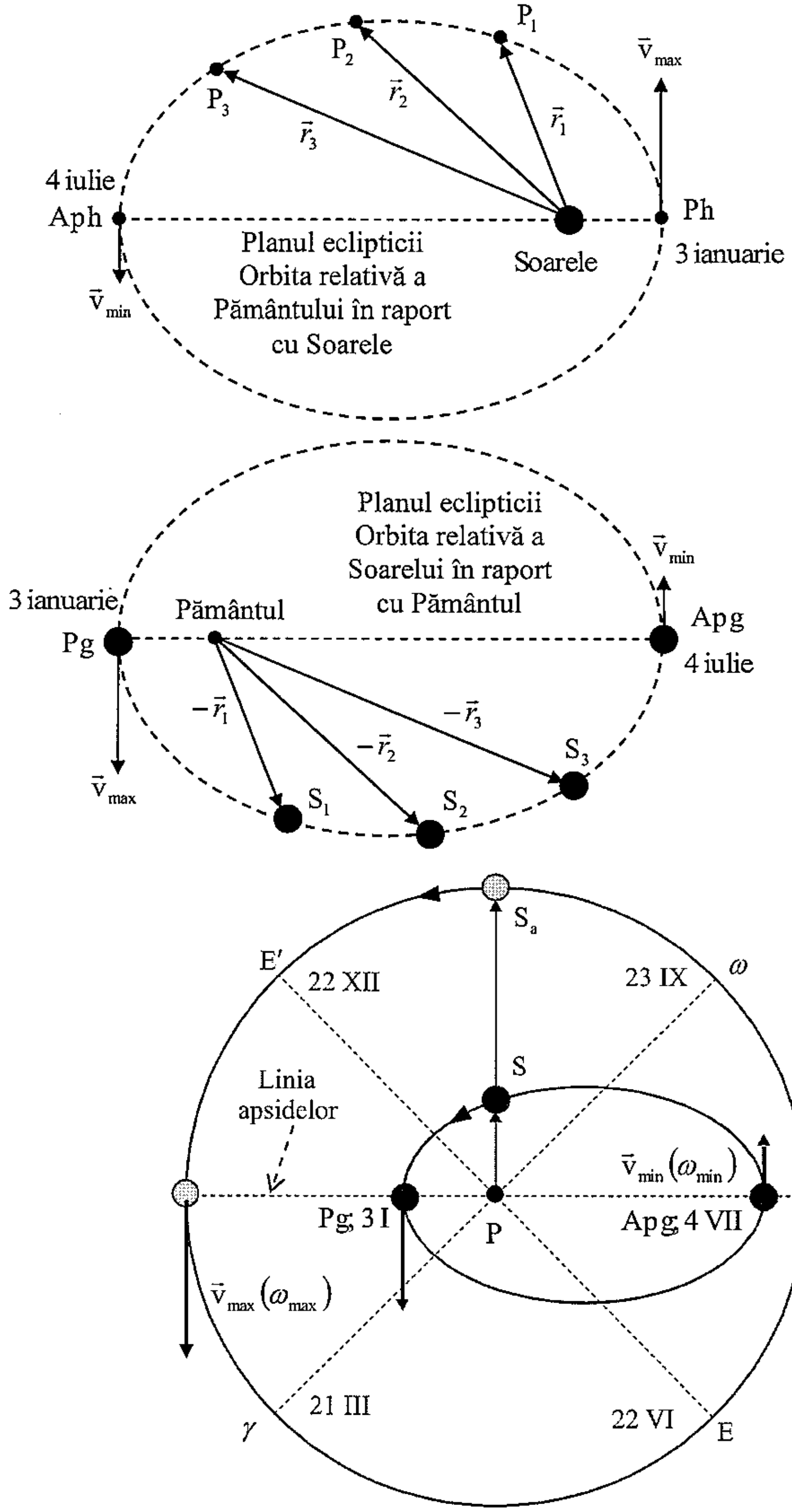
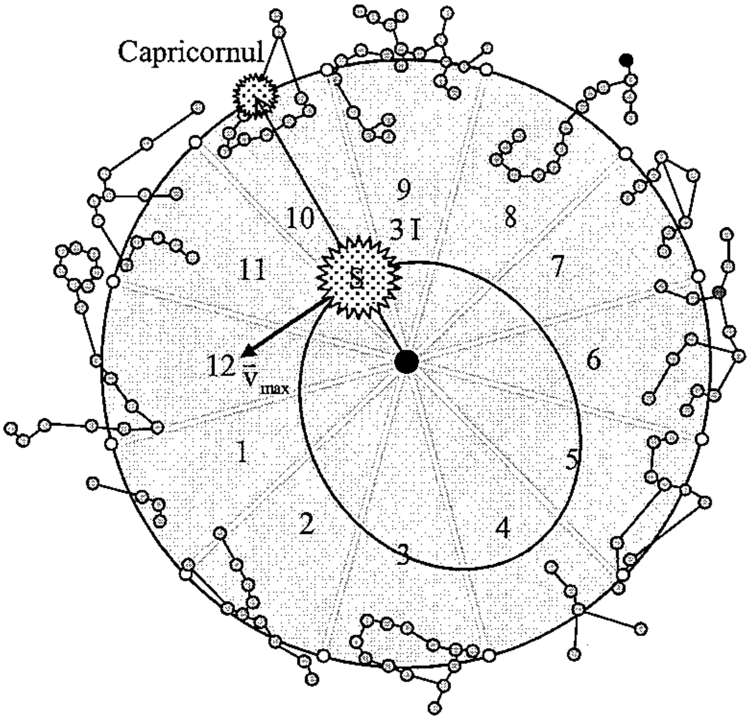

P1
P2
P3
r1
r2
r3
v max
4 iulie
Aph
Ph
Planul eclipticii
Orbita relativă a
Pământului în raport
cu Soarele
Soarele
3 ianuarie
v min
Planul eclipticii
Orbita relativă a
Soarelui în raport
cu Pământul
v min
3 ianuarie
Pământul
Apg
Pg
4 iulie
-r1
-r3
-r2
S3
v max
S1
S2
Sa
E′
22 XII
23 IX
ω
S
Linia
apsidelor
v min (ω min)
Pg; 3 I
P
Apg 4 VII
v max (ω max)
21 III
22 VI
γ
E

Figura 4



Pe durata unui an de zile, din diferitele poziții ale Pământului, aflate pe orbita sa în formă de elipsă, având Soarele real în unul din focare, se văd, în proiecție pe ecliptica heliocentrică, diferitele poziții ale Soarelui adevărat, așa cum indică desenul din figura alăturată, suprapuse peste imaginile celor 12 constelații din brâul zodiacal: 1 – Berbecul; 2 – Taurul; 3 – Gemenii; 4 – Racul; 5 – Leul; 6 – Fecioara; 7 – Balanța; 8 – Scorpionul; 9 – Săgetătorul; 10 – Capricornul; 11 – Vărsătorul; 12 – Peștii.

Justificare corectă **1 p**

Mișcarea aparentă a Soarelui adevărat pe ecliptică nu este uniformă, deoarece mișcarea relativă a Soarelui în jurul Pământului nu este uniformă. Ca urmare, deși cele 12 sectoare ale brâului zodiacal au întinderi unghiulare identice de-a lungul eclipticii, durata mișcării aparente a Soarelui adevărat nu este aceeași prin toate sectoarele.

În sectorul din brâul zodiacal, care corespunde deplasării Soarelui în vecinătatea Perigeului, (în ziua de 3 ianuarie, acolo unde viteza relativă a Soarelui este maximă), acolo viteza Soarelui adevărat va fi maximă, astfel încât durata prezenței Soarelui adevărat în sectorul respectiv este minimă.

Corespunzător acestor precizări, durata prezenței Soarelui pe sectoarele brâului zodiacal este minimă în sectorul constelației Capricornul (10). **0,5 p**

În sectorul din brâul zodiacal, care corespunde deplasării Soarelui în vecinătatea Apogeului, (în ziua de 4 iulie, acolo unde viteza relativă a Soarelui este minimă), acolo viteza Soarelui adevărat va fi minimă, astfel încât durata prezenței Soarelui adevărat în sectorul respectiv este maximă.

Corespunzător acestor precizări, durata prezenței Soarelui pe sectoarele brâului zodiacal este maximă în sectorul constelației Racul (4). **0,5 p**

Problema 4. Tranzitul exoplanetei

În acord cu formula lui Pogson, rezultă:

$$\log\frac{F}{F_0}=-0{,}4(m-m_0); \qquad \mathbf{0{,}5\ p}$$

$$F=(1-\eta)F_0; \qquad \mathbf{0{,}5\ p}$$

$$\log\frac{(1-\eta)F_0}{F_0}=-0{,}4(m-m_0);$$

$$\log(1-\eta)=-0{,}4(m-m_0);$$

$$\log(0{,}98)=-0{,}4(m-m_0)\approx-0{,}0088; \qquad \mathbf{0{,}5\ p}$$

$$m-m_0\approx 0{,}022^{\mathrm{m}}. \qquad \mathbf{0{,}5\ p}$$

Problema 5. Planeta extrasolară X!

$$P_{incid,P}=P_{abs,P}$$

$$\frac{\sigma T_S^{\,4}\,4\pi R_S^{\,2}}{4\pi P_{SP}^{\,2}}\cdot\pi R_P^{\,2}=\sigma T_P^{\,4}\,4\pi R_P^{\,2} \qquad \mathbf{0{,}25\ p}$$

$$T_P=T_S\sqrt{\frac{R_S}{2r_{PS}}} \qquad \mathbf{0{,}25\ p}$$

$$T_X=T_\Sigma\sqrt{\frac{R_\Sigma}{2r_{\Sigma X}}} \qquad \mathbf{0{,}25\ p}$$

$$r_{\Sigma X}=r_{PS}\cdot\frac{R_\Sigma\cdot T_\Sigma^{\,2}}{R_S T_S^{\,2}} \qquad \mathbf{0{,}25p}$$

$$\log\frac{\Phi_{stea\,\Sigma,r_{P\Sigma}}}{\Phi_{s,r_{Ps}}}=-0,4\left(m_\Sigma-m_S\right) \qquad \mathbf{0{,}25\ p}$$

$$\Phi_{stea\,\Sigma,r_{P\Sigma}}=\frac{\sigma\mathrm{T}_\Sigma^{\,4}\,4\pi R_\Sigma^{\,2}}{4\pi r_{p\Sigma}} \qquad \mathbf{0{,}25\ p}$$

$$r_{X\Sigma}=r_{PS}\cdot\frac{R_\Sigma\cdot T_\Sigma^{\,2}}{R_S T_S^{\,2}}\ \text{sau}\ \frac{R_\Sigma\cdot T_\Sigma^{\,2}}{R_S T_S^{\,2}}=\frac{r_{X\Sigma}}{r_{PS}} \qquad \mathbf{0,\ 25p}$$

$$r_{x\Sigma}=10^{0,2(m_\Sigma-m_S)}\cdot r_{P\Sigma} \qquad \mathbf{0{,}25\ p}$$