PROBLEME LUNGI

Problema 1. Planeta cilindrică!

a. Conform legii lui Gauss, ţinând cont că lungimea planetei este mult mai mare decât raza cilindrului şi datorită simetriei, intensitatea câmpului gravitaţional este perpendiculară pe generatoarea cilindrului, putându-se neglija fluxul câmpului gravitaţional prin bazele cilindrului .

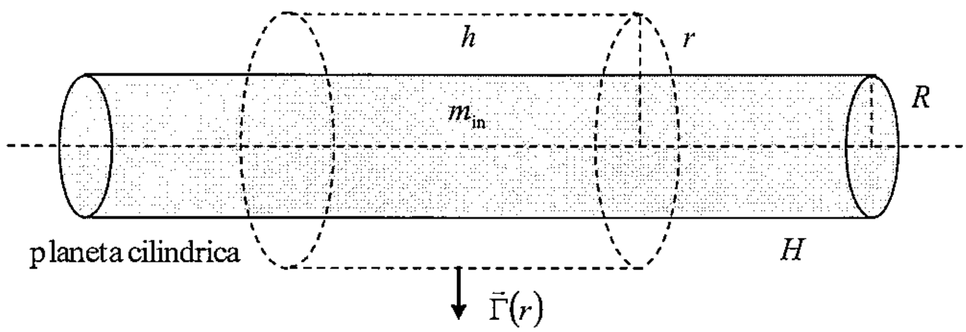
În aceste condiţii, rezultă:

$$\Phi = 2\pi rh\Gamma = 4\pi Km_{in};\ m_{in} = \rho\pi R^2 h$$ **0,5 p**

unde ρ este densitatea medie a planetei $(\rho = \rho_P)$;

$$2\pi rh\Gamma = 4\pi K\rho\pi R^2 h;$$ **0,5 p**

$$\Gamma(r) = \frac{2\pi\rho KR^2}{r} = g(r).$$



Ca urmare, viteza unui satelit care trebuie să evolueze în jurul acestei planete, pe o orbită circulară cu raza r (prima viteză cosmică), se obţine astfel:

$$mg = \frac{m v_{I,planeta}^2}{r};\ v_{I,planeta} = \sqrt{2\pi\rho KR^2}$$ **0,5 p**

expresie independentă de valoarea razei orbitei, adevărată deci şi pentru evoluţia satelitului pe o orbită foarte joasă, foarte aproape de suprafaţa planetei $(r = R)$;

$$\rho = \rho_P = \frac{M_P}{V_P};$$

$$v_{I,planeta} = \sqrt{2\pi\frac{M_P}{V_P}KR^2};\ V_P = \frac{4\pi R_P^3}{3}$$ **1 p**

unde V_P este volumul Pământului;

$$v_{I,planeta} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{M_P}{R_P^3}KR^2};\ R = R_P;\ v_{I,planeta} = \sqrt{\frac{3}{2}K\frac{M_P}{R_P}}$$ **0,5 p**

Prima viteză cosmică, în cazul evoluţiei unui satelit în jurul Pământului, foarte aproape de suprafaţa acestuia, fiind:

$$v_{I,Pamant} = \sqrt{K\frac{M_P}{R_P}};\ R = R_P$$ **0,5 p**

rezultă:

$$v_{I,planeta} = \sqrt{\frac{3}{2}K\frac{M_P}{R_P}} = \sqrt{\frac{3}{2}}v_{I,Pamant};$$ **0,25 p**

$$\mathrm{v}_{\mathrm{I,planetă}} = 1{,}22 \cdot 7{,}9\ \mathrm{km/s} = 9{,}63\ \mathrm{km/s}.$$ **0,25 p**

b) Se ştie că, pentru a fi geostaţionar, un satelit trebuie să evolueze pe o orbită circulară, a cărui rază trebuie să fie:

$$r_{\mathrm{P}}^{*} = \sqrt[3]{\frac{g_{0\mathrm{P}} R_{\mathrm{P}}^2}{\omega_0^2}}$$ **0,5 p**

unde: $g_{0\mathrm{P}}$ – acceleraţia gravitaţională la nivelul suprafeţei Pământului; ω_0 – viteza unghiulară corespunzătoare rotaţiei Pământului în jurul propriei axe;

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$ **0,5p**

unde T_0 – perioada rotaţiei Pământului în jurul axei proprii $(T_0 = 24\ \mathrm{h})$;

$$g_{0\mathrm{P}} = K\frac{M_{\mathrm{P}}}{R_{\mathrm{P}}^2};\ r_{\mathrm{P}}^{*} = \sqrt[3]{\frac{g_{0\mathrm{P}} R_{\mathrm{P}}^2}{\omega_0^2}};$$

$$r_{\mathrm{P}}^{*} = \sqrt[3]{\frac{K M_{\mathrm{P}} T_0^2}{4\pi^2}}$$

pentru care:

$$r_{\mathrm{P}}^{*3} = \frac{K M_{\mathrm{P}} T_0^2}{4\pi^2}$$ **0,5 p**

Pe de altă parte, pentru ca un satelit să evolueze sincron în jurul planetei cilindrice, trebuie ca raza orbitei sale să fie:

$$r_0 = \frac{T_0 \mathrm{v}}{2\pi} = \frac{T_0}{2\pi}\sqrt{2\pi\rho K R^2} = R\sqrt{\frac{T_0^2 \rho K}{2\pi}};$$ **0,5 p**

$$\rho = \rho_{\mathrm{P}} = \frac{M_{\mathrm{P}}}{V_{\mathrm{P}}} = \frac{3M_{\mathrm{P}}}{4\pi R_{\mathrm{P}}^3};\ R = R_{\mathrm{P}};$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{K M_{\mathrm{P}} T_0^2}{4\pi^2}\frac{1}{R_{\mathrm{P}}}};$$ **0,25 p**

$$r_0 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{r_{\mathrm{P}}^{*3}}{R_{\mathrm{P}}}};$$ **0,25 p**

$$r_0 = r_{\mathrm{P}}^{*}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{r_{\mathrm{P}}^{*}}{R_{\mathrm{P}}}};\ r_0 = 1{,}33 \cdot 10^8\ \mathrm{m};$$

$$h_0 = r_0 - R = r_0 - R_{\mathrm{P}};$$

$$h_0 = r_0 - R_{\mathrm{P}} = r_{\mathrm{P}}^{*}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{r_{\mathrm{P}}^{*}}{R_{\mathrm{P}}}} - R_{\mathrm{P}} = 1{,}27 \cdot 10^8\ \mathrm{m}.$$ **0,5 p**

c) Lansarea satelitului făcându-se cu scopul evadării acestuia din câmpul gravitaţional al planetei, înseamnă că evoluţia satelitului se va face pe arcul de parabolă, în al cărei focar se află centrul de masă al planetei, astfel încât energia totală a sistemului îndeplineşte condiţia:

$$E_{\mathrm{cin}} + E_{\mathrm{pot}} = 0;$$

$$\frac{m \mathrm{v}_{\mathrm{II,planeta}}^2}{2} + E_{\mathrm{pot}} = 0;$$ **0,5 p**

$$\mathrm{v}_{\mathrm{II,planeta}} = \sqrt{2}\ln\frac{H}{R}\mathrm{v}_{\mathrm{I,planeta}};\ \mathrm{v}_{\mathrm{I,planetă}} = 9{,}63\ \mathrm{km/s}.$$

Rezultă:

$$E_{\text{pot}} = -m\left(\ln\frac{H}{R}\right)^2 \text{v}_{\text{I,planeta}}^2; \qquad \mathbf{0{,}5\ p}$$

$$R = R_{\text{P}};\ E_{\text{pot}} = -K\frac{mM_{\text{P}}}{R_{\text{P}}}; \qquad \mathbf{0{,}5\ p}$$

$$\left(\ln\frac{H}{R_{\text{P}}}\right)^2 \text{v}_{\text{I,planeta}}^2 = K\frac{M_{\text{P}}}{R_{\text{P}}}; \qquad \mathbf{0{,}5\ p}$$

$$\ln\frac{H}{R_{\text{P}}} = \frac{\sqrt{K\frac{M_{\text{P}}}{R_{\text{P}}}}}{\text{v}_{\text{I,planeta}}} = \frac{\sqrt{K\frac{M_{\text{P}}}{R_{\text{P}}^2}R_{\text{P}}}}{\text{v}_{\text{I,planeta}}};$$

$$\ln\frac{H}{R_{\text{P}}} = \frac{\sqrt{g_{\text{oP}}R_{\text{P}}}}{\text{v}_{\text{I,planeta}}};\ g_{0\text{P}} = 9{,}8\ \text{ms}^{-2};\ \text{v}_{\text{I,planeta}} = 9{,}63\ \text{km/s};$$

$$\ln\frac{H}{R_{\text{P}}} = 0{,}82;\ H = R_{\text{P}}e^{0{,}82};\ H = R_{\text{P}}\sqrt[100]{(2{,}71)^{82}} \qquad \mathbf{0{,}5\ p}$$

$$e^{0{,}82} = \sqrt[100]{(2{,}71)^{82}} \approx 2{,}28;\ \ln(2{,}28) \approx 0{,}82;$$

$$H = 2{,}28 \cdot 6370\ \text{km} = 14.523{,}6\ \text{km} \qquad \mathbf{0{,}5\ p}$$

Problema 2. Răsăritul și apusul sateliților

a) Evenimentul răsăritului simultan al celor doi sateliți, pentru un observator de pe ecuator, este evidențiat în desenele din figurile

Observatorul terestru, aflat pe ecuator în poziția O_r

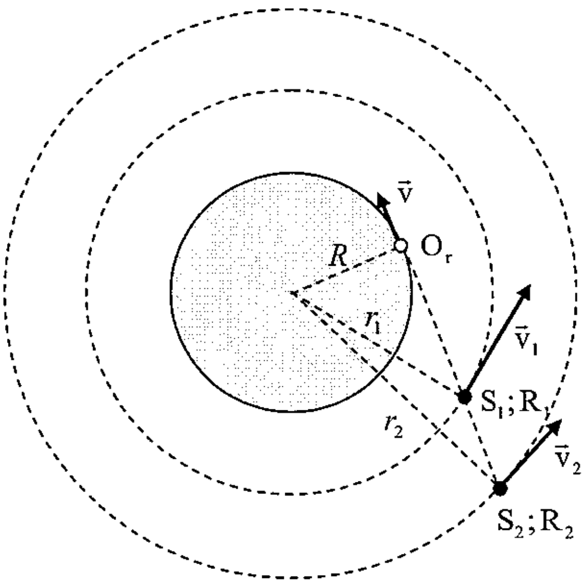


figura 1 Sensurile rotațiilor sateliților sunt aceleași cu sensul rotației proprii a Pământului 0,5 p

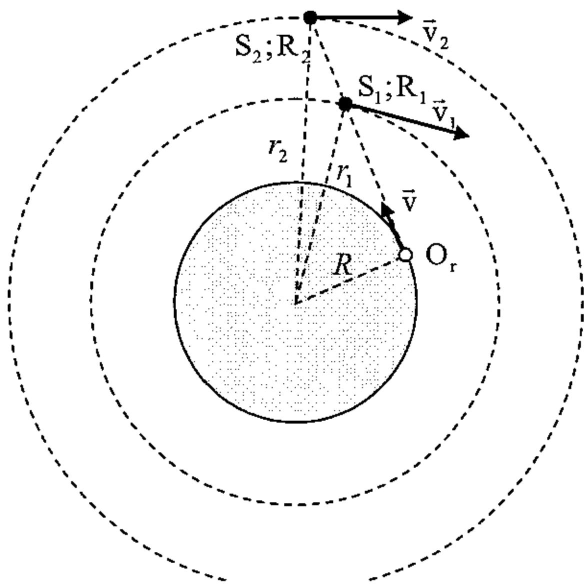


figura 1 Sensurile rotațiilor sateliților sunt opuse sensului rotației proprii a Pământului 0,5 p

față de centrul Pământului (figura), satelitul S_1, al cărui sens în mișcarea sa circulară uniformă considerăm că este același cu sensul rotației proprii a Pământului, apare la orizontul locului (răsare) în poziția R_1. Datorită rotației Pământului, atunci când satelitul va trece sub orizontul aceluiași loc de observare (apune) în poziția A_1, observatorul terestru se va afla în poziția O_{a1} față de centrul Pământului. Pe durata t_1 a vizibilității satelitului S_1, raza vectoare a observatorului descrie unghiul la centru α, iar raza vectoare a satelitului S_1 descrie unghiul la centru α_1.

Dacă ω și respectiv ω_1 sunt viteza unghiulară în mișcarea de rotație proprie a Pământului și respectiv viteza unghiulară în mișcarea circulară uniformă a satelitului S_1, rezultă:

$$\alpha = \omega\, t_1;\ \omega = \frac{2\pi}{T_P};\ T_P = 24\,\mathrm{h};$$

$$\alpha_1 = \omega_1 t_1 = \frac{v_1}{r_1} t_1 = \omega t_1;\ \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1};\ T_1 < T_P;$$

$$\omega_1 > \omega;$$

$$\alpha_1 = \alpha + 2\beta;\ \alpha_1 - \alpha = 2\beta;$$

$$\cos\beta = \frac{R}{r_1};\ \beta = \arccos\frac{R}{r_1};$$

$$\left(\frac{v_1}{r_1} - \omega\right) t_1 = 2\arccos\frac{R}{r_1};$$

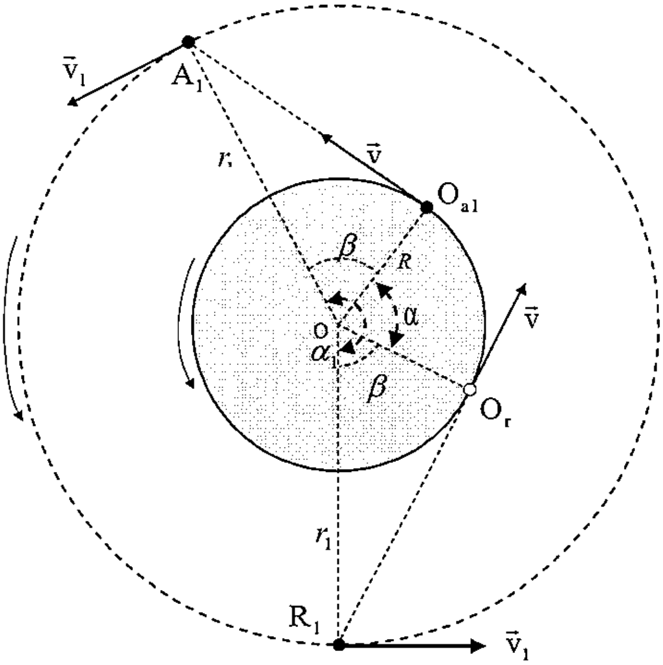


figura 3 Sensul rotației satelitului S_1 este același cu sensul rotației proprii a Pământului 0,5 p

$$t_{1;acelasi} = \frac{2\arccos\frac{R}{r_1}}{\frac{v_1}{r_1} - \omega};\ t_{1;acelasi} = \frac{2\arccos\frac{R}{r_1}}{\omega_1 - \omega}.$$ **1 p**

Sensul mișcării satelitului S_1 este invers față de sensul rotației Pământului, așa cum indică desenul din figura alăturată, rezultă:

$$\alpha = \omega t_1;$$

$$\alpha_1 = \omega_1 t_1 = \frac{v_1}{r_1} t_1 = \omega t_1;$$

$$\alpha_1 + \alpha = 2\beta;\ \alpha_1 + \alpha = 2\beta;$$

$$\cos\beta = \frac{R}{r_1};\ \beta = \arccos\frac{R}{r_1};$$

$$\left(\frac{v_1}{r_1} + \omega\right) t_1 = 2\arccos\frac{R}{r_1};$$

$$t_{1;invers} = \frac{2\arccos\frac{R}{r_1}}{\frac{v_1}{r_1} + \omega};$$

1 p $$t_{1;invers} = \frac{2\arccos\frac{R}{r_1}}{\omega_1 + \omega}.$$

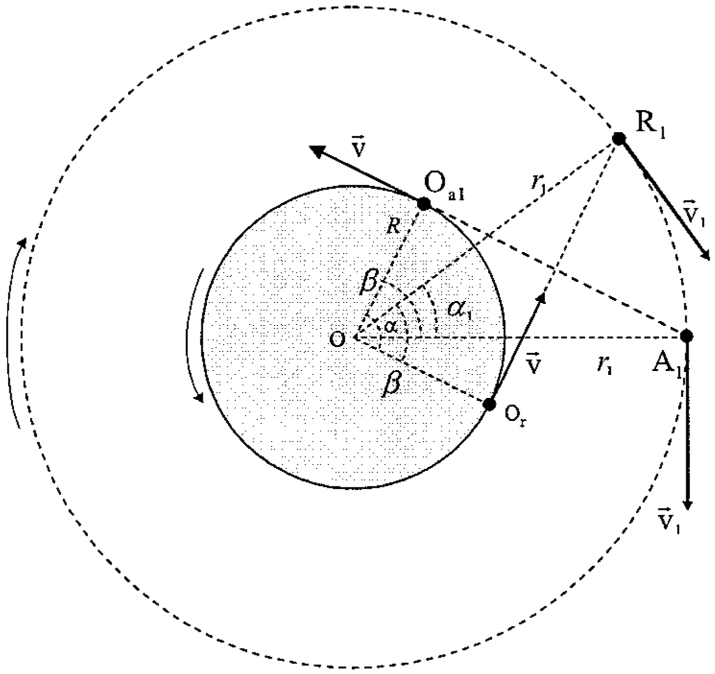


figura 4 Sensul rotației satelitului S_1 este opus sensului rotației proprii a Pământului 0,5 p

În mod asemănător, pentru satelitul S_2, se demonstrează că intervalul de timp dintre momentul răsăritului său, în poziția R_2 și momentul apusului său, în poziția A_2, este:

1. atunci când sensul rotației satelitului este același cu sensul rotației Pământului:

$$t_{2;acelasi} = \frac{2\arccos\frac{R}{r_2}}{\frac{v_2}{r_2} - \omega}; \qquad t_{2;acelasi} = \frac{2\arccos\frac{R}{r_2}}{\omega_2 - \omega}, \qquad \textbf{0,5 p}$$

2. atunci când sensul rotației satelitului este invers față de sensul rotației Pământului;

$$t_{2;invers} = \frac{2\arccos\frac{R}{r_2}}{\frac{v_2}{r_2} + \omega}; \quad t_{2;invers} = \frac{2\arccos\frac{R}{r_2}}{\omega_2 + \omega}, \qquad \textbf{0,5 p}$$

Comparația duratelor :

$$t_{1;acelasi} = \frac{2\arccos\frac{R}{r_1}}{\omega_1 - \omega}; \quad t_{2;acelasi} = \frac{2\arccos\frac{R}{r_2}}{\omega_2 - \omega};$$

$$\omega_2 < \omega_1;$$

$$\omega_2 - \omega < \omega_1 - \omega;$$

$$r_2 > r_1; \ \frac{R}{r_2} < \frac{R}{r_1}; \ \arccos\frac{R}{r_2} > \arccos\frac{R}{r_1};$$

$$\frac{\arccos\frac{R}{r_2}}{\omega_2 - \omega} > \frac{\arccos\frac{R}{r_1}}{\omega_1 - \omega};$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2 - \omega} > \frac{\arccos\frac{R}{r_1}}{\arccos\frac{R}{r_2}}; \qquad \textbf{0,25 p}$$

$$t_{2;acelasi} > t_{1;acelasi};$$

$$t_{1;invers} = \frac{2\arccos\frac{R}{r_1}}{\omega_1 + \omega}; \quad t_{2;invers} = \frac{2\arccos\frac{R}{r_2}}{\omega_2 + \omega};$$

$$\omega_2 + \omega < \omega_1 + \omega;$$

$$\frac{\arccos\frac{R}{r_2}}{\omega_2+\omega} > \frac{\arccos\frac{R}{r_1}}{\omega_1+\omega};$$

$$\arccos\frac{R}{r_2} > \arccos\frac{R}{r_1};$$

$$\frac{\omega_1+\omega}{\omega_2+\omega} > \frac{\arccos\frac{R}{r_1}}{\arccos\frac{R}{r_2}};$$ **0,25 p**

$$t_{2;\text{invers}} > t_{1;\text{invers}}.$$

În ambele variante, durata vizibilității satelitului S_2 este mai mare decât durata vizibilității satelitului S_1, astfel încât ordinea apusului este: S_1, S_2.

b) Intervalul de timp dintre momentele de apus ale celor doi sateliți, atunci când sensurile rotațiilor lor sunt aceleași cu sensul rotației proprii a Pământului, este:

$$(\Delta t)_{\text{acelasi sens}} = t_{2;\text{acelasi}} - t_{1;\text{acelasi}} = 2\left(\frac{\arccos\frac{R}{r_2}}{\omega_2-\omega} - \frac{\arccos\frac{R}{r_1}}{\omega_1-\omega}\right),$$ **0,25 p**

iar când sensurile rotațiilor lor sunt opuse sensului de rotație al Pământului, obținem:

$$(\Delta t)_{\text{sens opus}} = t_{2;\text{invers}} - t_{1;\text{invers}} = 2\left(\frac{\arccos\frac{R}{r_2}}{\omega_2+\omega} - \frac{\arccos\frac{R}{r_1}}{\omega_1+\omega}\right),$$ **0,25 p**

astfel încât rezultă:

$$\left(\frac{\arccos\frac{R}{r_2}}{\omega_2-\omega} - \frac{\arccos\frac{R}{r_1}}{\omega_1-\omega}\right) > \left(\frac{\arccos\frac{R}{r_2}}{\omega_2+\omega} - \frac{\arccos\frac{R}{r_1}}{\omega_1+\omega}\right);$$

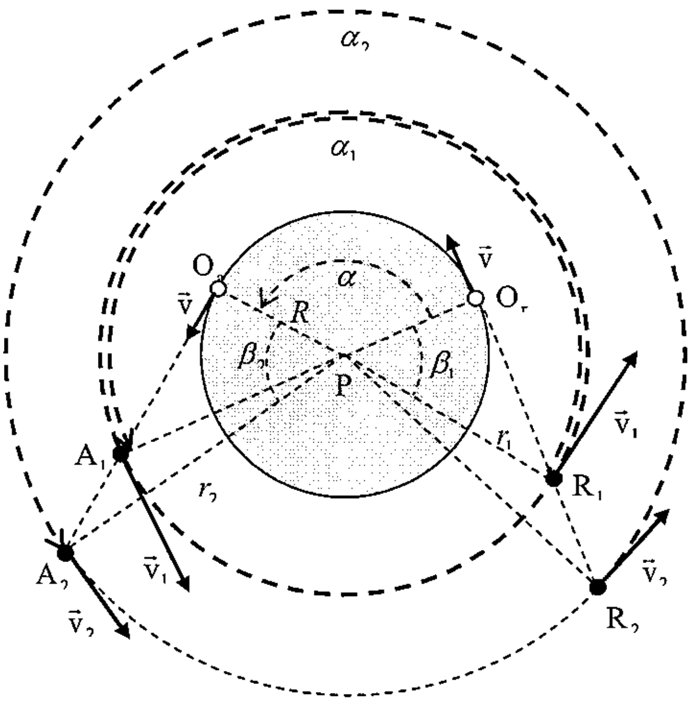
$$\frac{1}{\omega_2^2-\omega^2}\arccos\frac{R}{r_2} > \frac{1}{\omega_1^2-\omega^2}\arccos\frac{R}{r_1};$$

$$\frac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega_2^2-\omega^2} > \frac{\arccos\frac{R}{r_1}}{\arccos\frac{R}{r_2}};$$

$$\frac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega_2^2-\omega^2}>1;\ \frac{\arccos\frac{R}{r_1}}{\arccos\frac{R}{r_2}}<1;$$

$(\Delta t)_{\text{acelasi sens}} > (\Delta t)_{\text{sens opus}}$. **0,5 p**

c) În desenul din figura alăturată, când sensul rotațiilor sateliților este același cu sensul rotației proprii a Pământului, sunt notate pozițiile relative ale celor doi sateliți, R_1 și respectiv R_2, față de observator, O_r, în momentul răsăritului lor simultan, precum și pozițiile relative ale sateliților în momentul primului apus simultan al acestora, A_1 și respectiv A_2, față de observator, O_a, considerând că acest eveniment ar fi posibil.



Sensul de rotație al sateliților este același cu sensul de rotație al Pământului 0,5 p

În aceste condiții, deoarece $v_1 > v_2$, rezultă:

$$\alpha=\omega t;$$

$$\alpha_1=\omega_1 t=2\pi+2\beta_1+\alpha;\ \cos\beta_1=\frac{R}{r_1};$$

$$\beta_1=\arccos\frac{R}{r_1};$$

$$t=\frac{2\pi+2\beta_1}{\omega_1-\omega};$$ **0,5 p**

$$\alpha_2=\omega_2 t=2\beta_2+\alpha;\ \cos\beta_2=\frac{R}{r_2};\ \beta_2=\arccos\frac{R}{r_2};$$

$$t=\frac{2\beta_2}{\omega_2-\omega};$$ **0,5 p**

$$\frac{2\pi+2\beta_1}{\omega_1-\omega}=\frac{2\beta_2}{\omega_2-\omega};$$

$$\frac{\pi+\beta_1}{\omega_1-\omega}=\frac{\beta_2}{\omega_2-\omega},$$ **0,25 p**

reprezentând relația necesară dintre vitezele unghiulare ale celor doi sateliți, astfel încât, imediat după răsăritul simultan al celor doi sateliți, observatorul să constate apusul simultan al sateliților.

În desenul din figura alăturată, când sensul rotațiilor sateliților este invers față de sensul rotației proprii a Pământului, sunt notate pozițiile relative ale celor doi sateliți, R_1 și respectiv R_2, față de observator, O_r, în momentul răsăritului lor simultal, precum și pozițiile relative ale sateliților în momentul primului apus simultan al acestora, A_1 și respectiv A_2, față de observator, O_a, considerând că acest eveniment ar fi posibil.

În aceste condiții, deoarece $v_1 > v_2$, rezultă:

$$\alpha = \omega t;$$

$$\alpha_1 = \omega_1 t = 2\pi + 2\beta_1 - \alpha;$$

$$\cos\beta_1 = \frac{R}{r_1};\ \beta_1 = \arccos\frac{R}{r_1};$$

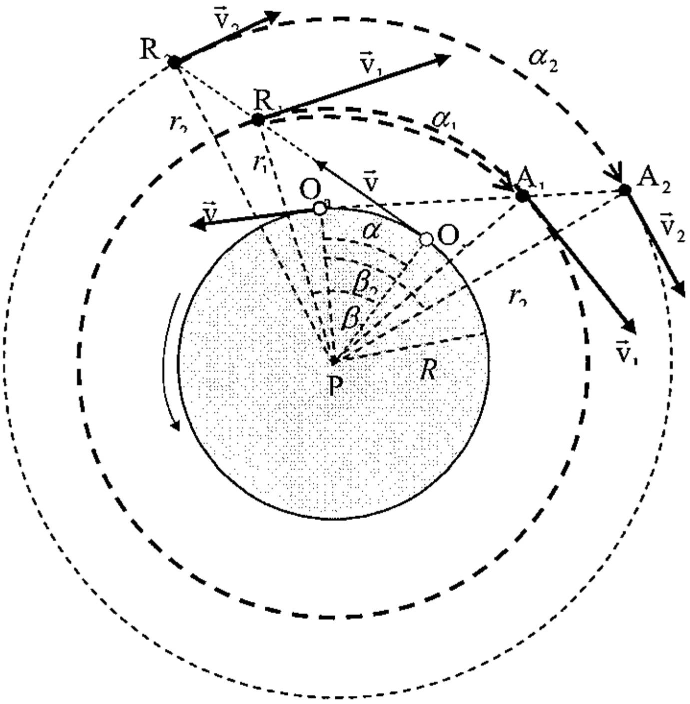
$$t = \frac{2\pi + 2\beta_1}{\omega_1 + \omega};\ \textbf{0,5 p}$$

$$\alpha_2 = \omega_2 t = 2\beta_2 - \alpha;\ \cos\beta_2 = \frac{R}{r_2};$$

$$\beta_2 = \arccos\frac{R}{r_2};$$

$$t = \frac{2\beta_2}{\omega_2 + \omega};\ \textbf{0,5 p}$$

$$\frac{2\pi + 2\beta_1}{\omega_1 + \omega} = \frac{2\beta_2}{\omega_2 + \omega};$$



$$\frac{\pi + \beta_1}{\omega_1 + \omega} = \frac{\beta_2}{\omega_2 + \omega},\quad \textbf{0,25 p}$$

Sensul de rotație al sateliților este opus sensului de rotație al Pământului **0,5 p**

reprezentând relația necesară dintre vitezele unghiulare ale celor doi sateliți, astfel încât, imediat după răsăritul simultan al celor doi sateliți, care se rotesc în sens invers față de sensul rotației proprii a Pământului, observatorul să constate apusul simultan al sateliților.