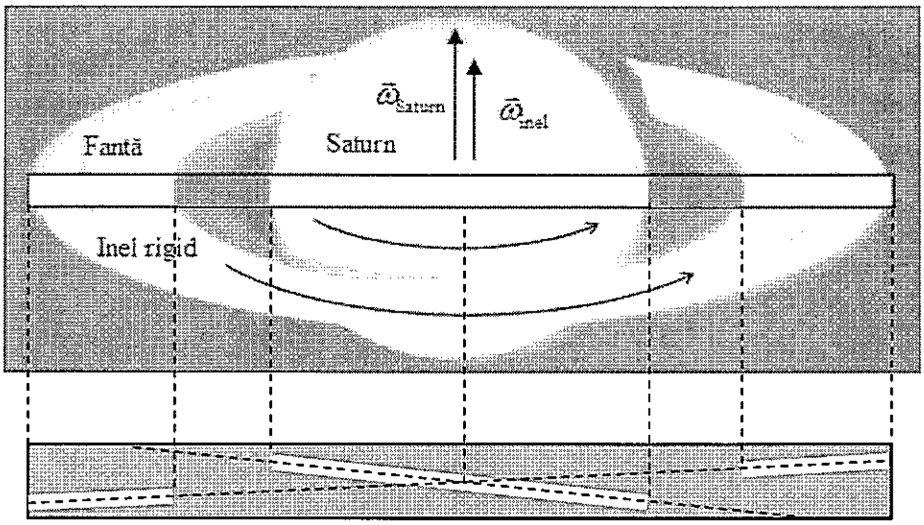
ANALIZĂ DATE - seniori

Problema 1. Masa lui Saturn

a) Dacă inelul lui Saturn ar fi un corp solid rigid în mişcare de rotaţie, cu viteza unghiulară ω_{inel}, atunci marginea exterioară a inelului ar trebui să fie mai rapidă decât marginea sa interioară, $v_{esterior} > v_{interior}$, **(0,5 p)** iar spectrul ar trebui să fie aşa cum indică desenul din figura alăturată, unde am avut în vedere că vitezele unghiulare ale celor două elemente ale sistemului (inelul şi planeta), sunt diferite, $\omega_{Saturn} \neq \omega_{inel}$.



0,75 p x 2

b) Analizând desenul din enunţul problemei, precum şi desenele din figurile alăturate este evident că linia de vedere a observatorului nu se află în planul ecuatorului lui Saturn şi deci nici în planul inelului lui Saturn. Unghiul dintre direcţia liniei de vedere a observatorului şi planul ecuatorului lui Saturn este α. Planul imaginii lui Saturn şi a inelului său, din enunţul problemei (planul BCEF), este proiecţia planului ecuatorului lui Saturn (planul ABCD).

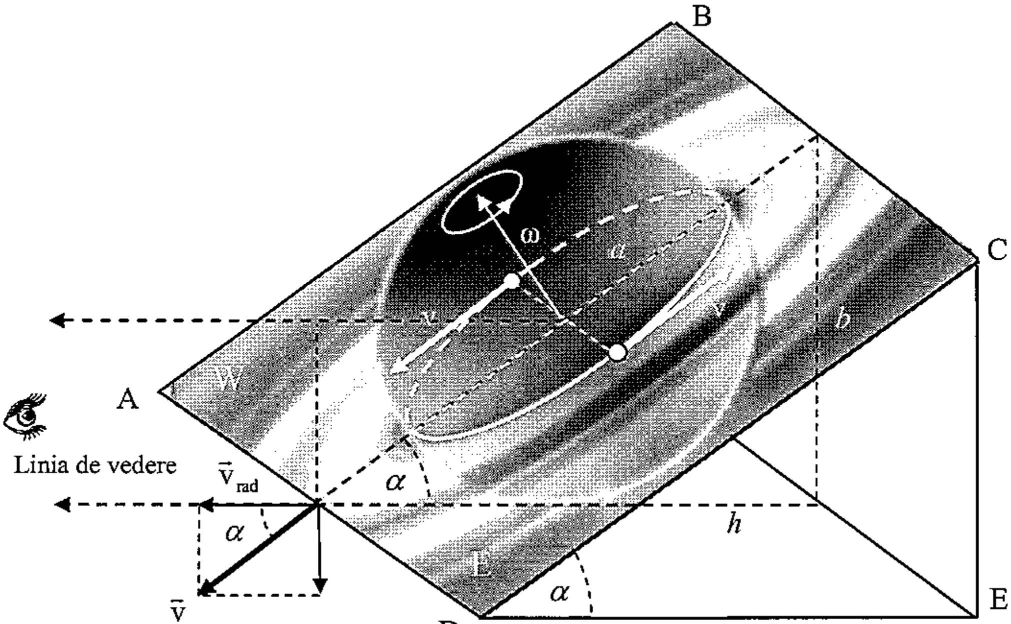
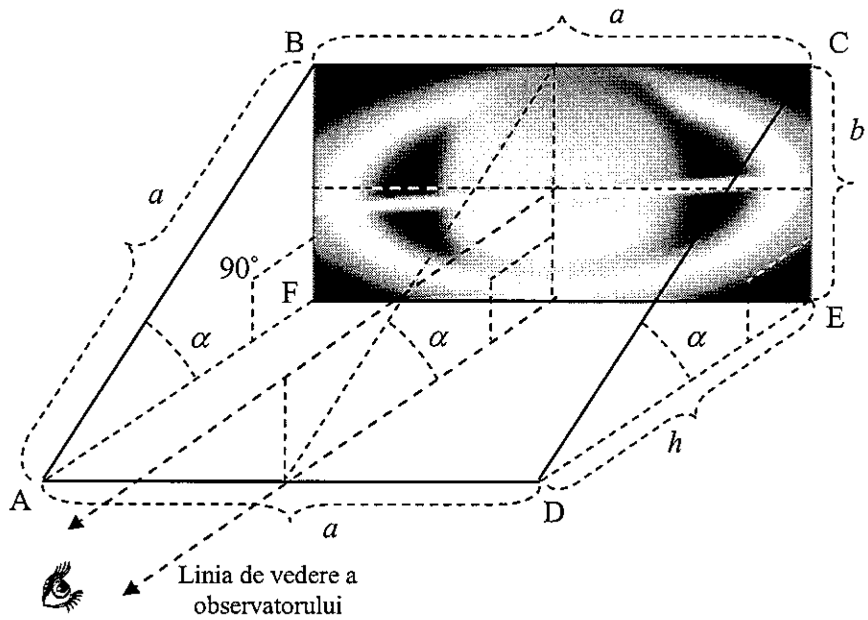


Fig.



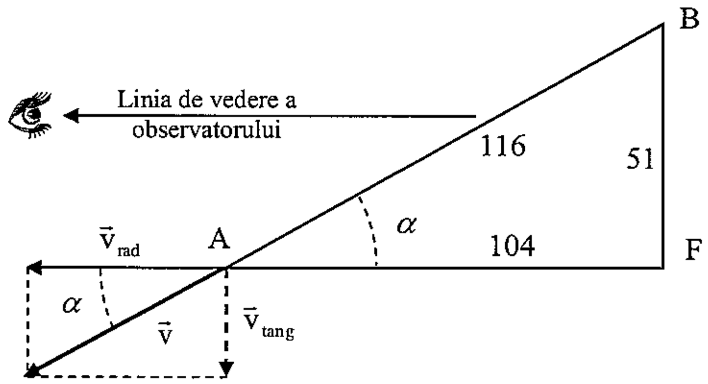
0,5 p

După măsurători efectuate pe imaginea inelului din enunțul problemei (a – axa mare; b – axa mică), rezultă:

$$a = 116\,\text{mm};\ b = 51\,\text{mm};$$ **0,5 p**

$$\cos\alpha = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{13456\,\text{mm}^2 - 2601\,\text{mm}^2}}{116\,\text{mm}} = \frac{104\,\text{mm}}{116\,\text{mm}} \approx 0{,}90$$ **1 p**

astfel încât, laturile triunghiului dreptunghic ABF, indiferent de semnificația lor fizică, au valori direct proporționale cu numerele notate pe desenul din figura alăturată.



c) Acum determinăm scala spectrului. Distanța dintre cele două linii spectrale ale Na I, măsurată cu rigla pe imaginea spectrului din enunțul problemei, este $d = 84\,\text{mm}$. Diferența lungimilor de undă ale celor două linii este $\Delta\lambda = 0{,}59\,\text{nm}$. Rezultă că scala spectrului este:

$$S_{\text{longitudinala spectru}} = S_{\text{spectru}} = \frac{\Delta\lambda}{d} \approx 0{,}007024\,\frac{\text{nm}}{\text{mm}}$$ **0,25 p**

Lumina de la Soare ajunge mai întâi la Saturn, unde se reflectă pe suprafața acestuia, cu o primă deplasare Doppler, care depinde de viteza suprafeței reflectante a lui Saturn în raport cu Soarele. Ajungând la observatorul de pe Pământ, lumina este înregistrată cu o nouă deplasare Doppler, care depinde de viteza relativă dintre observator și suprafața reflectantă a lui Saturn.

Deoarece lățimea umbrei lui Saturn, peste inelul său, evidențiată în imaginea din enunțul problemei, este foarte mică, însemnează că unghiul dintre direcțiile spre Pământ și Soare, privind de pe Saturn, așa cum indică desenul din figura alăturată, este foarte mic, astfel încât componentele radiale ale vitezelor sunt aceleași în ambele cazuri, așa cum indică desenul din figura alăturată.

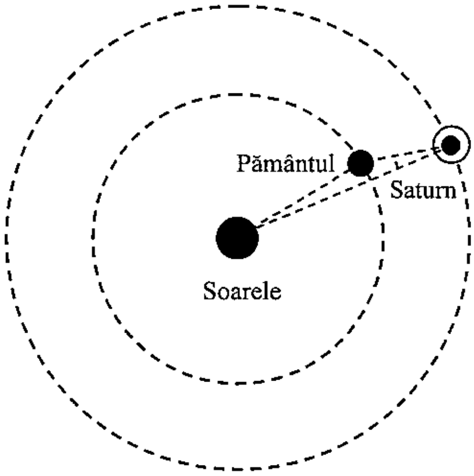


Fig.

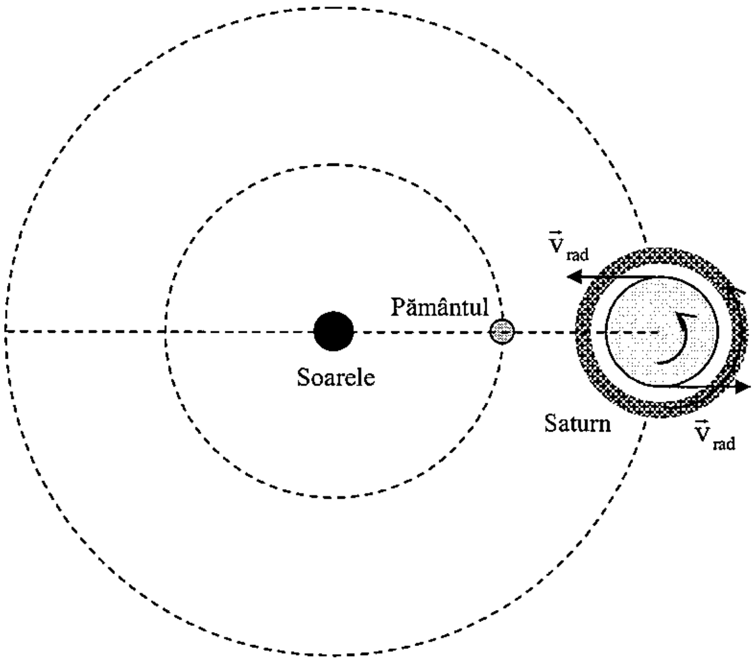


Fig.

Ca urmare:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c} + \frac{v_{rad}}{c} = \frac{2\,v_{rad}}{c}$$ **0,25 p**

unde v_{rad} este viteza radială a sursei de lumină în raport cu observatorul, astfel încât, utilizând spectrul din enunțul problemei, rezultă:

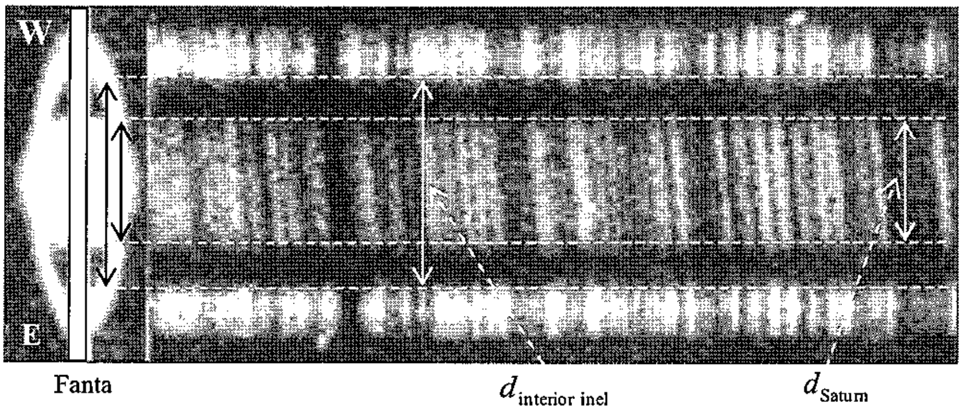
$$v_{rad} = v\cdot\cos\alpha;\ \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{2\,v\cdot\cos\alpha}{c};\ \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{S_{spectru}\cdot d}{\lambda_{0,mediu}}$$ **0,25 p**

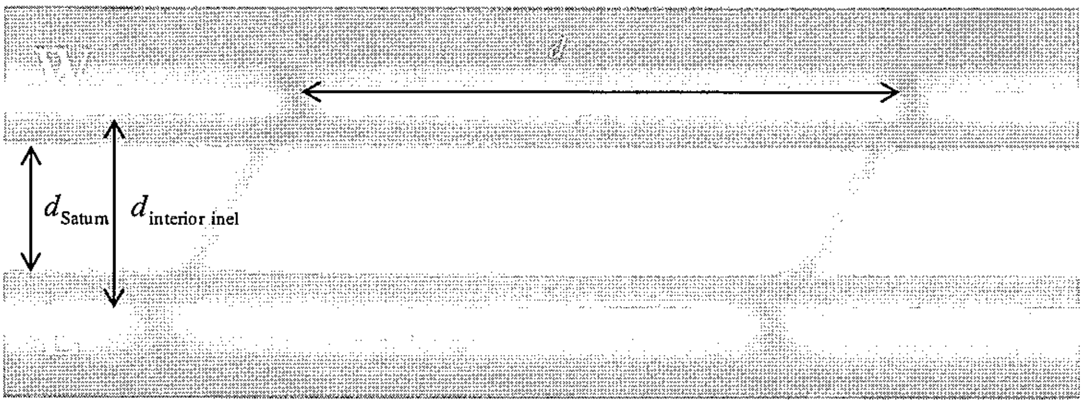
$$\frac{2\,v\cdot\cos\alpha}{c} = \frac{S_{spectru}\cdot d}{\lambda_{0,mediu}};\ \lambda_{0,mediu} = \frac{\lambda_{01}+\lambda_{02}}{2} \approx 589{,}3\ \text{nm}$$ **0,25 p**

$$\frac{\mathrm{v}}{d}=\frac{S_{\text{spectru}}\cdot c}{2\cdot\lambda_{0,\text{mediu}}\cdot\cos\alpha}=S_{\text{viteza}}$$

$$S_{\text{viteza}}=\frac{0{,}007024\,\dfrac{\text{nm}}{\text{mm}}\cdot 3\cdot 10^{5}\,\dfrac{\text{km}}{\text{s}}}{2\cdot 589{,}3\text{ nm}\cdot 0{,}90}=1{,}98\,\frac{\text{km/s}}{\text{mm}}\approx 2\,\frac{\text{km/s}}{\text{mm}}$$ **0,5 p**

reprezentând scala vitezei din imaginea spectrului.





Diferența vitezelor dintre punctele diametral opuse, West – Est, de pe ecuatorul lui Saturn, este:

$$\Delta\vec{\mathrm{v}}_{\text{W-E,Saturn}}=\vec{\mathrm{v}}_{\text{Saturn,W}}-\vec{\mathrm{v}}_{\text{Saturn,E}};$$

$$\Delta\mathrm{v}_{\text{Saturn,W-E}}=\mathrm{v}_{\text{Saturn,W}}+\mathrm{v}_{\text{Saturn,E}}=2\,\mathrm{v}_{\text{ecuator Saturn}}$$ **0,25 p**

unde $\mathrm{v}_{\text{ecuator Saturn}}$ – viteza unui punct de pe ecuatorul lui Saturn.

Utilizând imaginea spectrului din enunțul problemei, rezultă:

$$\Delta x=10\,\text{mm};$$

$$\Delta\mathrm{v}_{\text{Saturn,W-E}}=S_{\text{viteza}}\cdot\Delta x=1{,}98\,\frac{\text{km/s}}{\text{mm}}\cdot 10\text{ mm}\approx 20\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$\mathrm{v}_{\text{ecuator Saturn}}=\frac{1}{2}\cdot\Delta\mathrm{v}_{\text{Saturn}}=0{,}5\cdot 20\,\frac{\text{km}}{\text{s}}=10\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$ **0,25p**

reprezentând viteza unui punct de pe ecuatorul lui Saturn;

$$T_{\text{rotatie proprie, Saturn}}=10{,}66\text{ h}=38376\text{ s};$$

$$L_{\text{circumferinta ecuator Saturn}}=\mathrm{v}_{\text{ecuator Saturn}}\cdot T_{\text{rotatie proprie, Saturn}}$$ **0,25 p**

$$L_{\text{circumferinta ecuator Saturn}}=10\,\frac{\text{km}}{\text{s}}\cdot 38376\text{ s}=383760\text{ km}=\pi D_{\text{Saturn}}$$ **0,25 p**

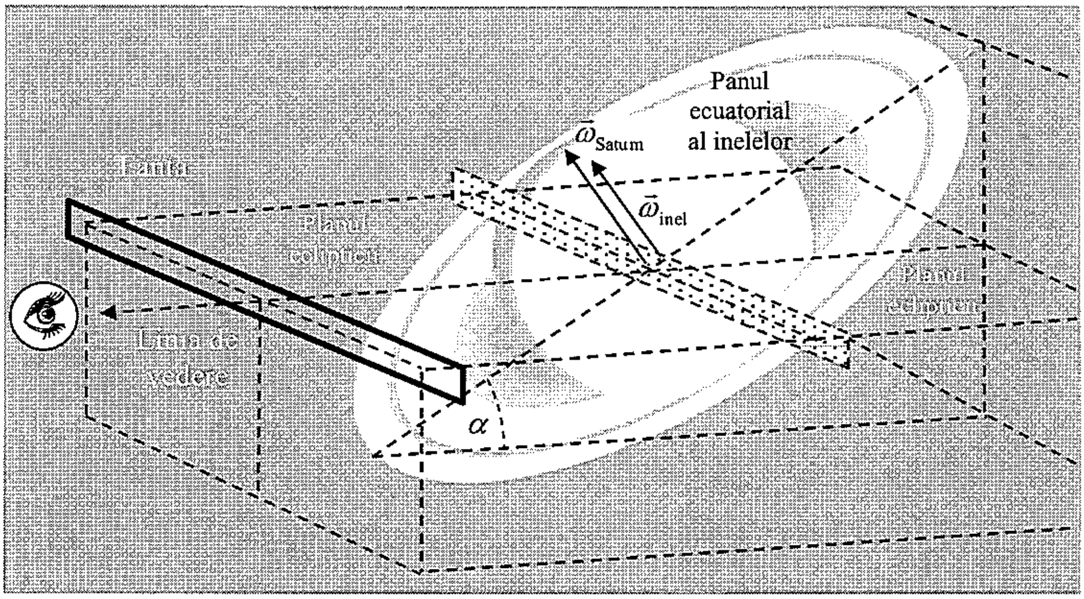
reprezentând circumferința ecuatorială a lui Saturn;

$$D_{\text{Saturn}} = \frac{L_{\text{circumferinta ecuator Saturn}}}{\pi} = \frac{383760}{3{,}14}\ \text{km} \approx 122216\ \text{km} \qquad \mathbf{0{,}25\ p}$$

$$R_{\text{Saturn}} = \frac{D_{\text{Saturn}}}{2} = 61108\ \text{km} \qquad \mathbf{0{,}25\ p}$$

reprezentând raza lui Saturn.

Dacă Saturn se află foarte aproape de opoziție, atunci vitezele radiale ale tuturor punctelor reflectante, aflate în spatele fantei, atât de pe suprafața lui Saturn, cât și de pe suprafața inelului, în raport cu Soarele și în raport cu Pământul sunt egale, așa cum indică desenul din figura alăturată. Ca urmare cele două deplasări Doppler sunt identice.



Observatorul se află în planul eclipticii. Planul fantei este perpendicular pe planul eclipticii. Inelul lui Saturn se află în planul ecuatorial al lui Saturn. Acest plan este înclinat față de planul eclipticii. Unghiul dintre planul eclipticii și planul ecuatorial al lui Saturn este α. Proiecția fantei pe sistemul Saturn – inel este prezentată în desenul din figura alăturată. Linia de vedere a observatorului de pe Pământ trece prin centrul lui Saturn și se află în planul eclipticii. Intersecția planului eclipticii cu planul ecuatorial al lui Saturn se face de-a lungul unui cerc mare de pe suprafața lui Saturn. Ca urmare, jumătate din inelul lui Saturn se va afla deasupra eclipticii, iar cealaltă jumătate a inelului se va afla sub planul eclipticii.

În spatele fantei se rotesc Saturn și inelul acestuia, reflectând lumina de la Soare. Având în vedere că Saturn și inelul său sunt în mișcare atât față de Soare, cât și față de Pământ, radiațiile primite pe Pământ vor fi afectate de două deplasări Doppler.

d) În imaginea spectrului din enunțul problemei, diametrul lui Saturn, măsurat cu o riglă, este $d_{\text{Saturn}} = 18\ \text{mm}$, astfel încât: **0,25 p**

$$S_{\text{latime imagine spectru}} = \frac{D_{\text{Saturn}}}{d_{\text{Saturn}}} = \frac{122216\ \text{km}}{18\ \text{mm}} \approx 6790\,\frac{\text{km}}{\text{mm}},$$

reprezentând scala lățimii imaginii spectrului din enunțul problemei.

În imaginea spectrului din enunțul problemei, măsurând cu o riglă diametrul cercului interior al inelului găsim:

$$d_{\text{interior inel}} = 26\ \text{mm} \qquad \mathbf{0{,}25\ p}$$

astfel încât diametrul cercului interior al inelului lui Saturn este:

$$D_{\text{interior inel}} = d_{\text{interior inel}} \cdot S_{\text{latime imagine spectru}} = 26\ \text{mm} \cdot 6790\,\frac{\text{km}}{\text{mm}} = 176540\ \text{km} \qquad \mathbf{0{,}25\ p}$$

$$a_{\text{interior inel}} = \frac{D_{\text{interior inel}}}{2} = 88270\,\text{km} \qquad \textbf{0,25 p}$$

Din legea a treia a lui Kepler, rezultă:

$$T^2_{\text{Pamant}} = 4\pi^2 \frac{a^3_{\text{Pamant}}}{KM_{\text{Soare}}};\; T^2_{\text{interior inel}} = 4\pi^2 \frac{a^3_{\text{interior inel}}}{KM_{\text{Saturn}}};$$

$$\left(\frac{T_{\text{interior inel}}}{T_{\text{Panant}}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{a_{\text{interior inel}}}{a_{\text{Pamant}}}\right)^3}{\frac{M_{\text{Saturn}}}{M_{\text{Soare}}}};\; M_{\text{Saturn}} = \frac{\left(\frac{a_{\text{interior inel}}}{a_{\text{Pamant}}}\right)^3}{\left(\frac{T_{\text{interior inel}}}{T_{\text{Pamant}}}\right)^2} \cdot M_{\text{Soare}} \qquad \textbf{0,25 p}$$

Diferența vitezelor dintre punctele diametral opuse, West – Est, de pe cercul interior al inelului lui Saturn, este:

$$\Delta \vec{v}_{\text{W-E,interior inel}} = \vec{v}_{\text{interior inel,W}} - \vec{v}_{\text{interior inel,E}};$$

$$\Delta v_{\text{W-E,interior inel}} = v_{\text{interior inel,W}} + v_{\text{interior inel,E}} = 2v_{\text{interior inel}},$$

unde $v_{\text{interior inel}}$ – viteza unui punct de pe cercul interior al inelului lui Saturn;

Utilizând imaginea spectrului din enunțul problemei, rezultă:

$$\Delta y = 20\,\text{mm} \qquad \textbf{0,25 p}$$

$$\Delta v_{\text{interior inel}} = \Delta y \cdot S_{\text{viteza}} = 20\,\text{mm} \cdot 1{,}98\,\frac{\text{km/s}}{\text{mm}} = 39{,}7\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \qquad \textbf{0,25 p}$$

reprezentând diferența vitezelor punctelor diametral opuse, West – Est, de pe cercul interior al inelului lui Saturn

Lungimea circumferinței cercului interior al inelului lui Saturn, cu diametrul $D_{\text{interior inel}} = 176540\,\text{km}$, este:

$$L_{\text{interior inel}} = \pi D_{\text{interior inel}} \approx 554336\,\text{km},$$

astfel încât perioada rotației unui punct de pe cercul interior al inelului lui Saturn este:

$$T_{\text{interior inel}} = \frac{L_{\text{interior inel}}}{v_{\text{interior inel}}} = \frac{\pi D_{\text{interior inel}}}{\frac{1}{2} \cdot \Delta v_{\text{interior inel}}} \qquad \textbf{0,25 p}$$

$$T_{\text{interior inel}} = \frac{3{,}14 \cdot 176540\,\text{km}}{0{,}5 \cdot 39{,}7\,\frac{\text{km}}{\text{s}}} = \frac{554336\,\text{km}}{0{,}5 \cdot 39{,}7\,\frac{\text{km}}{\text{s}}} \approx 27926\,\text{s} \qquad \textbf{0,25 p}$$

Rezultă:

$$a_{\text{interior inel}} = 88270\,\text{km};\; a_{\text{Pamant}} = 1\,\text{UA} = 1496 \cdot 10^5\,\text{km};$$

$$T_{\text{interior inel}} = 27926\,\text{s};\; T_{\text{Pamant}} = 1\,\text{an} = 3{,}16 \cdot 10^7\,\text{s};$$

$$M_{\text{Soare}} = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\text{kg},$$

$$M_{\text{Saturn}} = \frac{\left(\frac{a_{\text{interior inel}}}{a_{\text{Pamant}}}\right)^3}{\left(\frac{T_{\text{interior inel}}}{T_{\text{Pamant}}}\right)^2} \cdot M_{\text{Soare}} \qquad \textbf{0,25 p}$$

$$M_{\text{Saturn}} = 5{,}2 \cdot 10^{26}\,\text{kg} \qquad \textbf{0,25 p}$$

Problema 2. Refracția atmosferică în jurul unei planete (10 p)

a) Condiția optică necesară producerii refracției luminii în jurul planetei

Dacă totul se întâmplă așa cum indică desenul din figura alăturată, ca urmare a refracției luminii prin mediul gazos de la baza atmosferei planetei, înseamnează că frontul de undă plan, AB, al undei electromagnetice, trebuie să rămână mereu perpendicular pe suprafața planetei și la aceeași distanță față de aceasta (frontul A'B'), deși el se propagă printr-o atmosferă neomogenă (dar cu straturi sferice concentrice, foarte subțiri, omogene).

Dacă lumina se propagă în jurul planetei, prin stratul gazos de la baza atmosferei planetei, așa cum indică desenul din figura alăturată, înseamnează că durata propagării luminii pe oricare din arcele de cerc AA' și BB', corespunzătoare aceluiași unghi la centru, φ, este aceeași:

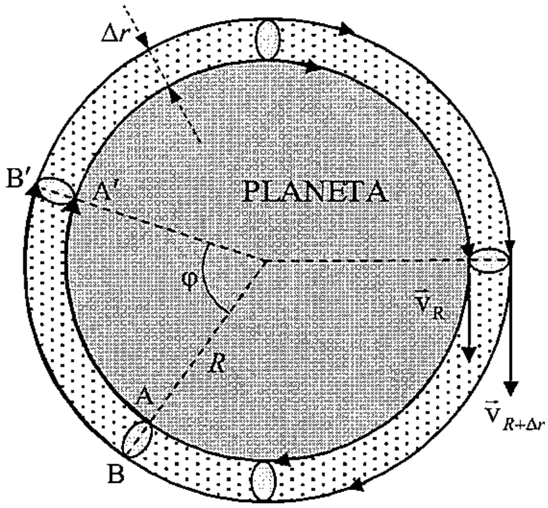


Fig.

$$t=\frac{AA'}{v_R}=\frac{BB'}{v_{R+\Delta r}}$$ **0,25 p**

unde v_R este viteza luminii în stratul sferic gazos, omogen și subțire, de la baza atmosferei, cu raza R, iar $v_{R+\Delta r}$ este viteza luminii în stratul sferic gazos, omogen și subțire, cu raza $R+\Delta r$;

$$v_{R+\Delta r}>v_R;$$

$$n_R=\frac{c}{v_R};\ n_{R+\Delta r}=\frac{c}{v_{R+\Delta r}}<n_R$$ **0,5 p**

unde c este viteza luminii în vid, n_R este indicele de refracție al gazului atmosferic din stratul sferic gazos, omogen și subțire, cu raza R, iar $n_{R+\Delta r}$ este indicele de refracție al gazului atmosferic din stratul sferic gazos, omogen și subțire, cu raza $R+\Delta r$.

Rezultă:

$$AA'\cdot n_R=BB'\cdot n_{R+\Delta r};\ n_{R+\Delta r}<n_R;$$

$$AA'=R\varphi;\ BB'=(R+\Delta r)\varphi;$$

$$Rn_R=(R+\Delta r)n_{R+\Delta r};\ n_{R+\Delta r}=n_R+\Delta n$$ **0,5 p**

unde $\Delta n<0$ este variația indicelui de refracție al gazului atmosferic al planetei, asociat cu înălțimea Δr față de suprafața planetei;

$$Rn_R=(R+\Delta r)\cdot(n_R+\Delta n);$$

$$\Delta r\cdot\Delta n\approx 0;$$

$$-\frac{\Delta n}{n_R \Delta r}=\frac{1}{R};$$

$$n_R = n;\quad -\frac{\Delta n}{n\Delta r}=\frac{1}{R};\quad \frac{-\frac{\Delta n}{n}}{\Delta r}=\frac{1}{R};\quad -\frac{\Delta n}{n\Delta r}=\frac{1}{R};$$

$$-\frac{\Delta n / n}{\Delta r}=\frac{1}{R}$$ **0,5 p**

adică raportul dintre variația relativă a indicelui de refracție al gazului aflat la baza atmosferei planetei și înălțimea corespunzătoare față de suprafața planetei este egal cu curbura suprafeței planetei (inversul razei planetei), ***reprezentând condiția necesară producerii refracției luminii în jurul planetei;***

- curbura teoretică a suprafeței planetei, $C_{\text{suprafata planeta}}=\frac{1}{R};$

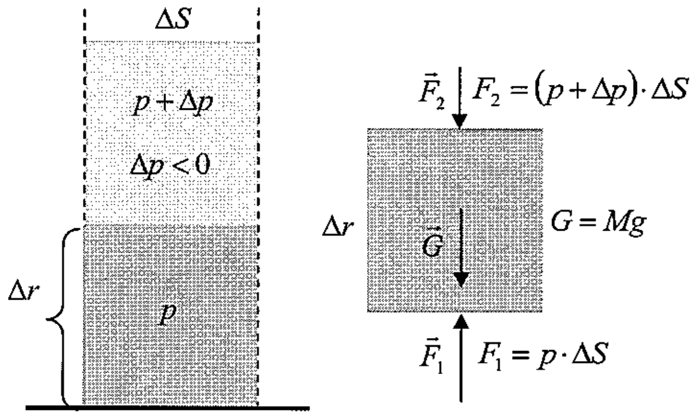
- curbura razei de lumină în stratul gazos de la baza atmosferei planetei, $C_{\text{raza lumina}}=-\frac{\Delta n}{n\Delta r};$

$$C_{\text{raza lumina}}=C_{\text{suprafata planeta}}$$ **0,5 p**

b) Relația dintre indicele de refracție și proprietățile fizice ale gazului de la baza atmosferei planetei (presiune, temperatură, concentrație a moleculelor, masă a moleculelor).

Dependența curburii razei de lumină de proprietățile fizice ale gazului de la baza atmosferei planetei.

În acord cu notațiile din figura alăturată, pentru condiția de echilibru a unei coloane de gaz cu înălțimea Δr și aria secțiunii transversale ΔS, de la baza atmosferei oricărei planete rezultă:



$$\vec{F}_1+\vec{G}+\vec{F}_2=0;$$
$$F_1-G-F_2=0;$$
$$p\cdot\Delta S-Mg-(p+\Delta p)\cdot\Delta S=0;$$
$$p\cdot\Delta S-Mg-p\cdot\Delta S-\Delta p\cdot\Delta S=0;$$
$$-\Delta p\cdot\Delta S=Mg;$$
$$-\Delta p\cdot\Delta S=Nmg\cdot\Delta r\cdot\Delta S;$$
$$-\Delta p=Nmg\cdot\Delta r$$ **0,5 p**

unde m este masa unei molecule, iar g este accelerația gravitațională la baza atmosferei planetei:

$$p=NkT;\quad \Delta p=kT\Delta N;$$
$$-kT\cdot\Delta N=Nmg\cdot\Delta r;$$
$$-\frac{\Delta N}{\Delta r}=N\frac{mg}{kT}$$ **0,5 p**

Pentru că indicele de refracție al vidului este $n_{\text{vid}} = 1$, înseamnează că indicele de refracție al mediului gazos de la baza atmosferei planetei este $n > 1$ tocmai datorită prezenței moleculelor mediului gazos, astfel încât diferența celor doi indici de refracție (diferența față de unitate a indicelui de refracție al mediului gazos de la baza atmosferei planetei) trebuie să fie direct proporțională cu concentrația moleculelor de gaz de la baza atmosferei planetei:

$$n - 1 = \alpha N,$$

unde N este concentrația moleculelor de gaz la baza atmosferei planetei, iar α este o constantă de proporționalitate, a cărei semnificație fizică trebuie stabilită;

$$\langle N \rangle_{SI} = \text{m}^{-3};\ \langle \alpha \rangle_{SI} = \text{m}^3,$$

ceea ce înseamnează că α are semnificația unui volum; **0,5 p**

$$n - 1 = \alpha N,$$

$$\Delta(n-1) = \Delta(\alpha N);\ \Delta n = \alpha \Delta N;$$

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\alpha \Delta N}{n};\ n \approx 1;$$

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\alpha \Delta N}{n} \approx \alpha \Delta N,$$

pentru că indicele de refracție al gazului de la baza atmosferei planetei nu diferă cu foarte mult față de unitate;

$$\frac{\Delta n}{n} = \alpha \Delta N;\ \Delta N = \frac{\Delta n}{\alpha n};$$

$$-\frac{\Delta N}{\Delta r} = N\frac{mg}{kT}$$

$$-\frac{\frac{\Delta n}{\alpha n}}{\Delta r} = N\frac{mg}{kT};\ -\frac{\Delta n}{\alpha n \Delta r} = N\frac{mg}{kT};$$

$$C_{\text{raza lumina}} = -\frac{\Delta n}{n \Delta r} = \alpha N \frac{mg}{kT},$$

reprezentând dependența curburii razei de lumină, care se propagă în stratul sferic gazos de la baza atmosferei planetei, $C_{\text{raza lumina}}$, de proprietățile fizice ale gazului de la baza atmosferei planetei.

Această dependență, $C_{\text{raza lumina}}$, se poate determina experimental pentru atmosfera fiecărei planete. În final se compară valorile celor două curburi:

$$C_{\text{raza lumina, experimental}} = \alpha N \frac{mg}{kT};\ C_{\text{suprafata planeta}} = \frac{1}{R},$$

pentru fiecare dintre planete. **0,5 p**

Variante posibile:

$$C_{\text{raza lumina, experimental}} = C_{\text{suprafata planeta}}$$

$$C_{\text{raza lumina, experimental}} < C_{\text{suprafata planeta}}$$

$$C_{\text{raza lumina, experimental}} > C_{\text{suprafata planeta}}$$

c) Semnificația volumică numerică a constantei α, corelată cu volumul moleculei de gaz din componența bazei atmosferei fiecărei planete

Pentru atmosfera planetei Pământ, din determinări experimentale efecuate la baza acesteia, se știe că:

$$n - 1 \approx 11{,}35 \cdot 10^{-5} = \alpha N;\ p = 1\,\text{bar} = 10^5\ \text{Nm}^{-2};\ T = 300\ \text{K},$$

astfel încât, rezultă:

$$N = \frac{p}{kT} = \frac{10^5 \text{ Nm}^{-2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \dfrac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K}},$$

unde $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K (constanta lui Boltzman);

$$N \approx 2{,}41 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3},$$

reprezentând concentrația moleculelor de azot la baza atmosferei planetei Pământ;

$$11{,}35 \cdot 10^{-5} = \alpha \cdot 2{,}41 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3};$$

$$\alpha \approx 14{,}13 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3$$ **1 p**

reprezentând un volum, aproximativ egal cu volumul unei molecule de azot (al cărei diametru este $d_{N_2} \approx 3 \cdot 10^{-10}$ m).

Într-adevăr, volumul unei molecule de azot este:

$$V_{1,N_2} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{d_{N_2}}{2}\right)^3 = \frac{4 \cdot 3{,}14}{3} \cdot \frac{27 \cdot 10^{-30}}{8} \text{ m}^3;$$

$$V_{1,N_2} \approx 14{,}13 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3 \approx \alpha$$ **1 p**

Concluzie: semnificația fizică a constantei de proporționalitate α este aceea a volumului moleculei de gaz aflată în structura bazei atmosferei fiecărei planete.

d) Curburile razelor de lumină la bazele atmosferelor planetelor

- Pentru ***atmosfera planetei Pământ***, la baza acesteia, alcătuită din molecule de azot, unde presiunea atmosferică este p = 1 bar și temperatura este T = 300 K, rezultă:

$$N = \frac{p}{kT} = \frac{10^5 \text{ Nm}^{-2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \dfrac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K}};$$

$$N \approx 2{,}41 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3};$$

$$V_{1,N_2} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{d_{N_2}}{2}\right)^3 = \frac{4 \cdot 3{,}14}{3} \cdot \frac{27 \cdot 10^{-30}}{8} \text{ m}^3;$$

$$V_{1,N_2} \approx 14{,}13 \cdot 10^{-30} \text{ m}^3 \approx \alpha;$$

$$\alpha N = 4{,}71 \cdot 10^{-30} \text{ m}^{-3} \cdot 2{,}41 \cdot 10^{25} \text{ m}^3 = 11{,}35 \cdot 10^{-5};$$

$$\alpha N \cdot \frac{mg}{kT} = 34{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{28 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ ms}^{-2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \dfrac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 3 \cdot 10^2 \text{ K}};$$

$$\alpha N \cdot \frac{mg}{kT} \approx 0{,}37 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{m}}$$ **0,2 p**

- Să analizăm acum ***atmosfera planetei Venus***, la baza acesteia, despre care se știe că este alcătuită în principal din molecule de dioxid de carbon, temperatura la baza atmosferei lui Venus fiind $T \approx 700$ K, iar presiunea atmosferică la suprafața lui Venus este $p \approx 100$ atm, astfel încât concentrația moleculelor de CO_2 la baza atmosferei lui Venus este:

$$N = \frac{p}{kT} = \frac{10^2 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \dfrac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 700 \text{ K}}$$

$$N \approx 10^{27} \text{ m}^{-3}$$ **0,2 p**

Deoarece diametrul moleculei de CO_2 este:

$$d_{CO_2} = 1{,}25 \cdot d_{N_2},$$

rezultă că volumul moleculei de CO_2 este:

$$d_{CO_2} = 3{,}75 \cdot 10^{-10}\ \text{m};$$

$$V_{1,CO_2} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{d_{CO_2}}{2}\right)^3 = \frac{4\cdot 3{,}14}{3}\cdot\frac{(3{,}75)^3\cdot 10^{-30}}{8}\ \text{m}^3;$$

$$V_{1,CO_2} = 27{,}59\cdot 10^{-30}\ \text{m}^3 = \alpha,$$

reprezentând volumul moleculei de azot.

Rezultă:

$$\alpha N = 27{,}59\cdot 10^{-30}\ \text{m}^{-3}\cdot 10^{27}\ \text{m}^3 = 27{,}59\cdot 10^{-3};$$

$$\alpha N\cdot\frac{mg}{kT} = 27{,}59\cdot 10^{-3}\cdot\frac{44\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot 8{,}5\ \text{ms}^{-2}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}}\cdot 7\cdot 10^2\ \text{K}};$$

$$\alpha N\cdot\frac{mg}{kT} \approx 17{,}7318\cdot 10^{-7}\ \text{m}^{-1}.$$

- Pentru ***atmosfera planetei Marte***, la baza acesteia, procedând asemănător, rezultă:

$$N = \frac{p}{kT} = \frac{10^{-2}\cdot 10^5\ \text{Nm}^{-2}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}}\cdot 200\ \text{K}};$$

$$N \approx 3{,}62\cdot 10^{23}\ \text{m}^{-3};$$

$$V_{1,CO_2} = 27{,}59\cdot 10^{-30}\ \text{m}^3 = \alpha;$$

$$\alpha N = 27{,}59\cdot 10^{-30}\ \text{m}^{-3}\cdot 3{,}62\cdot 10^{23}\ \text{m}^3 = 99{,}87\cdot 10^{-7};$$

$$\alpha N\cdot\frac{mg}{kT} = 99{,}87\cdot 10^{-7}\cdot\frac{44\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot 3{,}7\ \text{ms}^{-2}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}}\cdot 2\cdot 10^2\ \text{K}};$$

$$\alpha N\cdot\frac{mg}{kT} \approx 9{,}77886\cdot 10^{-10}\ \text{m}^{-1}$$ **0,2 p**

- Pentru ***atmosfera planetei Jupiter***, la baza acesteia, rezultă:

$$N = \frac{p}{kT} = \frac{10^5\ \text{Nm}^{-2}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}}\cdot 340\ \text{K}};$$

$$N \approx 2{,}13\cdot 10^{25}\ \text{m}^{-3};$$

$$V_{1,H_2} = 4{,}18\cdot 10^{-30}\ \text{m}^3 = \alpha;$$

$$\alpha N = 4{,}18\cdot 10^{-30}\ \text{m}^{-3}\cdot 2{,}13\cdot 10^{25}\ \text{m}^3 = 8{,}9\cdot 10^{-5};$$

$$\alpha N\cdot\frac{mg}{kT} = 8{,}9\cdot 10^{-5}\cdot\frac{2\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot 23\ \text{ms}^{-2}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}}\cdot 340\ \text{K}};$$

$$\alpha N\cdot\frac{mg}{kT} \approx 14{,}48\cdot 10^{-10}\ \text{m}^{-1}$$ **0,2 p**

- Pentru ***atmosfera planetei Uranus***, la baza acesteia, rezultă:

$$N = \frac{p}{kT} = \frac{10^3\cdot 10^5\ \text{Nm}^{-2}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}}\cdot 50\ \text{K}};$$

$$N \approx 145\cdot 10^{27}\ \text{m}^{-3};$$

$$V_{1,H_2} = 4{,}18\cdot 10^{-30}\ \text{m}^3 = \alpha;$$

$$\alpha N = 4{,}18\cdot 10^{-30}\ \text{m}^{-3}\cdot 145\cdot 10^{27}\ \text{m}^3 = 606{,}1\cdot 10^{-3};$$

$$\alpha N \cdot \frac{mg}{kT} = 606{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 8{,}8\ \text{ms}^{-2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 50\ \text{K}};$$

$$\alpha N \cdot \frac{mg}{kT} \approx 2566{,}35 \cdot 10^{-8}\ \text{m}^{-1}$$ **0,2 p**

- Pentru ***atmosfera planetei Saturn***, la baza acesteia, rezultă:

$$N = \frac{p}{kT} = \frac{10^{3} \cdot 10^{5}\ \text{Nm}^{-2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 400\ \text{K}};$$

$$N \approx 18 \cdot 10^{27}\ \text{m}^{-3};$$

$$V_{1,\text{H}_2} = 4{,}18 \cdot 10^{-30}\ \text{m}^{3} = \alpha;$$

$$\alpha N = 4{,}18 \cdot 10^{-30}\ \text{m}^{-3} \cdot 18 \cdot 10^{27}\ \text{m}^{3} = 75{,}24 \cdot 10^{-3};$$

$$\alpha N \cdot \frac{mg}{kT} = 75{,}24 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{2 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 10{,}4\ \text{ms}^{-2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 400\ \text{K}};$$

$$\alpha N \cdot \frac{mg}{kT} \approx 470{,}63 \cdot 10^{-9}\ \text{m}^{-1}$$ **0,2 p**

- Pentru ***atmosfera planetei Mercur***, la baza acesteia, rezultă:

$$N = \frac{p}{kT} = \frac{10^{-14} \cdot 10^{5}\ \text{Nm}^{-2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 450\ \text{K}};$$

$$N \approx 16 \cdot 10^{10}\ \text{m}^{-3};$$

$$V_{1,\text{H}_2} = 27{,}59 \cdot 10^{-30}\ \text{m}^{3} = \alpha;$$

$$\alpha N = 27{,}59 \cdot 10^{-30}\ \text{m}^{-3} \cdot 16 \cdot 10^{10}\ \text{m}^{3} = 441{,}44 \cdot 10^{-20};$$

$$\alpha N \cdot \frac{mg}{kT} = 441{,}44 \cdot 10^{-20} \cdot \frac{44 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 3{,}7\ \text{ms}^{-2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 450\ \text{K}};$$

$$\alpha N \cdot \frac{mg}{kT} \approx 1921 \cdot 10^{-25}\ \text{m}^{-1}$$ **0,2 p**

- Pentru ***atmosfera planetei Neptun***, la baza acesteia, rezultă:

$$N = \frac{p}{kT} = \frac{10^{3} \cdot 10^{5}\ \text{Nm}^{-2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 70\ \text{K}};$$

$$N \approx 10^{29}\ \text{m}^{-3};$$

$$V_{1,\text{H}_2} = 4{,}18 \cdot 10^{-30}\ \text{m}^{3} = \alpha;$$

$$\alpha N = 4{,}18 \cdot 10^{-30}\ \text{m}^{-3} \cdot 10^{29}\ \text{m}^{3} = 4{,}18 \cdot 10^{-1};$$

$$\alpha N \cdot \frac{mg}{kT} = 4{,}18 \cdot 10^{-1} \cdot \frac{2 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 11{,}1\ \text{ms}^{-2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 70\ \text{K}};$$

$$\alpha N \cdot \frac{mg}{kT} \approx 15{,}95 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^{-1}$$ **0,2 p**

- Pentru ***atmosfera exoplanetei X***, la baza acesteia, rezultă:

$$N = \frac{p}{kT} = \frac{15 \cdot 10^{5}\ \text{Nm}^{-2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 500\ \text{K}}$$

$$N \approx 2{,}17 \cdot 10^{26}\ \text{m}^{-3};$$
$$V_{1,N_2} = 4{,}71 \cdot 10^{-30}\ \text{m}^3 = \alpha;$$
$$\alpha N = 4{,}71 \cdot 10^{-30}\ \text{m}^{-3} \cdot 2{,}17 \cdot 10^{26}\ \text{m}^3 = 10{,}22 \cdot 10^{-4};$$
$$\alpha N \cdot \frac{mg}{kT} = 10{,}22 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{28 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 20\ \text{ms}^{-2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 500\ \text{K}};$$
$$\alpha N \cdot \frac{mg}{kT} \approx 137{,}68 \cdot 10^{-9}\ \text{m}^{-1}$$ **0,2 p**

- Pentru ***atmosfera exoplanetei Y***, la baza acesteia, rezultă:

$$N = \frac{p}{kT} = \frac{20 \cdot 10^5\ \text{Nm}^{-2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 600\ \text{K}};$$
$$N \approx 2{,}41 \cdot 10^{26}\ \text{m}^{-3};$$
$$V_{1,CH_4} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{d_{CH_4}}{2}\right)^3 = \frac{4 \cdot 3{,}14}{3} \cdot \frac{(4)^3 \cdot 10^{-30}}{8}\ \text{m}^3;$$
$$V_{1,H_2} = 33{,}5 \cdot 10^{-30}\ \text{m}^3 = \alpha;$$
$$\alpha N = 33{,}5 \cdot 10^{-30}\ \text{m}^{-3} \cdot 2{,}41 \cdot 10^{26}\ \text{m}^3 = 80{,}7 \cdot 10^{-4};$$
$$\alpha N \cdot \frac{mg}{kT} = 80{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{16 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 15\ \text{ms}^{-2}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 600\ \text{K}};$$
$$\alpha N \cdot \frac{mg}{kT} \approx 3883 \cdot 10^{-10}\ \text{m}^{-1}$$ **0,2 p**

Rezultatele obținute sunt notate în coloanele tabelelor alăturate.

Planeta	p -bar	m- uam	T -K	g m/s^2	N m^{-3}	α m^3	$\alpha Nmg / kT$ m^{-1}
Pământ	1	28	300	9,8	$2{,}41 \cdot 10^{25}$	$14{,}13 \cdot 10^{-30}$	$0{,}37 \cdot 10^{-7}$
Venus	100	44	700	8,5	10^{27}	$27{,}59 \cdot 10^{-30}$	$17{,}73 \cdot 10^{-7}$
Marte	10^{-2}	44	200	3,7	$3{,}62 \cdot 10^{23}$	$27{,}59 \cdot 10^{-30}$	$9{,}7 \cdot 10^{-10}$
Jupiter	1	2	340	23	$2{,}13 \cdot 10^{25}$	$4{,}18 \cdot 10^{-30}$	$14{,}48 \cdot 10^{-10}$
Uranus	1000	2	50	8,8	$145 \cdot 10^{27}$	$4{,}18 \cdot 10^{-30}$	$2566{,}35 \cdot 10^{-8}$
Saturn	1000	2	400	10,4	$18 \cdot 10^{27}$	$4{,}18 \cdot 10^{-30}$	$470{,}63 \cdot 10^{-9}$
Mercur	10^{-14}	44	450	3,7	$16 \cdot 10^{10}$	$27{,}59 \cdot 10^{-30}$	$1921 \cdot 10^{-25}$
Neptun	1000	2	70	11,1	10^{29}	$4{,}18 \cdot 10^{-30}$	$15{,}95 \cdot 10^{-6}$
Exo X	15	28	500	20	$2{,}17 \cdot 10^{26}$	$4{,}71 \cdot 10^{-30}$	$137{,}68 \cdot 10^{-9}$
Exo Y	20	16	600	15	$2{,}41 \cdot 10^{26}$	$33{,}5 \cdot 10^{-30}$	$388{,}3 \cdot 10^{-9}$

Planeta	$\alpha Nmg/kT$ m^{-1}	R m	$1/R$ m^{-1}	$C_{\text{raza lumina, experimental}}$? $C_{\text{suprafata planeta}}$
Pământ	$0{,}37\cdot10^{-7}$	$64\cdot10^{5}$	$1{,}56\cdot10^{-7}$	$C_{\text{raza lumina, exp}} < C_{\text{suprafata planeta}}$
Venus	$17{,}73\cdot10^{-7}$	$62\cdot10^{5}$	$1{,}61\cdot10^{-7}$	$C_{\text{raza lumina, exp}} > C_{\text{suprafata planeta}}$
Marte	$9{,}7\cdot10^{-10}$	$34\cdot10^{5}$	$2{,}94\cdot10^{-6}$	$C_{\text{raza lumina, exp}} < C_{\text{suprafata planeta}}$
Jupiter	$14{,}48\cdot10^{-10}$	$715\cdot10^{5}$	$1{,}3\cdot10^{-8}$	$C_{\text{raza lumina, exp}} < C_{\text{suprafata planeta}}$
Uranus	$2566{,}35\cdot10^{-8}$	$26\cdot10^{6}$	$3{,}8\cdot10^{-8}$	$C_{\text{raza lumina, exp}} > C_{\text{suprafata planeta}}$
Saturn	$470{,}63\cdot10^{-9}$	$60\cdot10^{6}$	$1{,}6\cdot10^{-9}$	$C_{\text{raza lumina, exp}} > C_{\text{suprafata planeta}}$
Mercur	$1921\cdot10^{-25}$	$2{,}4\cdot10^{6}$	$416\cdot10^{-9}$	$C_{\text{raza lumina, exp}} < C_{\text{suprafata planeta}}$
Neptun	$15{,}95\cdot10^{-6}$	$25\cdot10^{6}$	$4\cdot10^{-9}$	$C_{\text{raza lumina, exp}} > C_{\text{suprafata planeta}}$
Exo X	$137{,}68\cdot10^{-9}$	$72{,}5\cdot10^{5}$	$137\cdot10^{-9}$	$C_{\text{raza lumina, exp}} \approx C_{\text{suprafata planeta}}$
Exo Y	$388{,}3\cdot10^{-9}$	$25{,}75\cdot10^{5}$	$388\cdot10^{-9}$	$C_{\text{raza lumina, exp}} \approx C_{\text{suprafata planeta}}$

2 p

Concluzii

- Analizând datele numerice înscrise în tabelul anterior, constatăm că pentru nici una dintre planetele Sistemului Solar nu este îndeplintă condiția producerii refracției luminii în jurul planetei, prin stratul gazos de la baza atmosferei fiecărei planete, deoarece:

$$C_{\text{raza lumina, exp}} \neq C_{\text{suprafata planeta}}.$$

- Pentru exoplanetele X și Y, corespunzător stratului gazos de la baza atmosferei fiecărei exoplanete:

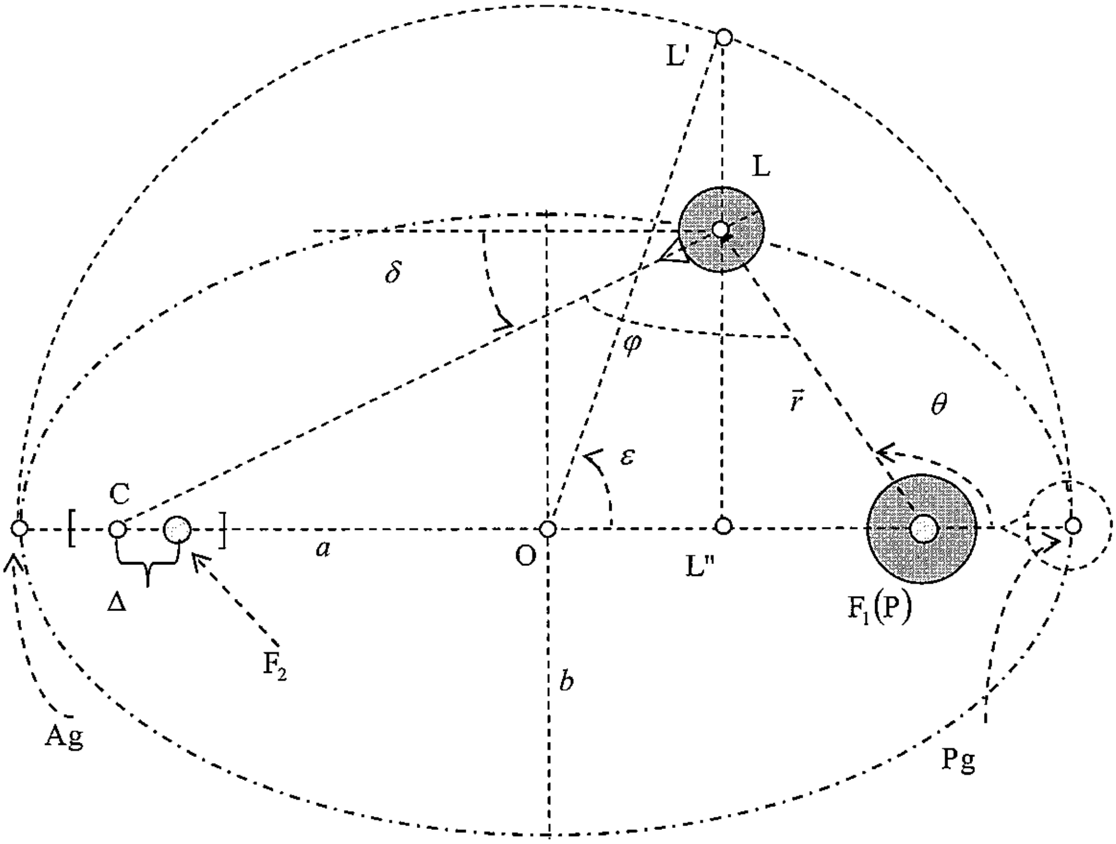
$$C_{\text{raza lumina, exp}} \approx C_{\text{suprafata planeta}},$$

reprezentând condiția producerii refracției luminii în jurul exoplanetelor, prin stratul gazos de la baza fiecărei exoplanete.

Și miracolul este gata: privind departe în față, astronautul își vede rucsacul din spate!
ASTRONAUTUL DE PE EXOPLANETĂ ÎȘI VEDE CEAFA!

Problema 3. Ceea ce Newton n-a ştiut! (10 p)

a) Vom analiza, pentru început, situaţia reprezentată în desenul din enunţul problemei, când Luna se află pe orbita eliptică, într-un moment când unghiul δ este mic şi punctul C se află la stânga focarului F_2, aşa cum indică figura alăturată.



Dacă în intervalul de timp t, corespunzător căruia, centrul Lunii se deplasează pe elipsa mare, din poziţia L_0 până în poziţia L, aria suprafeţei descrisă de raza vectoare a centrului Lunii este:

$$S = \frac{ab}{2}(\varepsilon - e\sin\varepsilon),$$

atunci, în acord cu a II-a lege a lui Kepler, rezultă:

$$\frac{S}{S_0} = \frac{t}{T}$$ **0,5 p**

unde T este perioada rotaţiei Lunii în jurul Pământului, iar S_0 este aria suprafeţei elipsei;

$$S_0 = \pi ab;$$

$$\frac{\frac{ab}{2}(\varepsilon - e\sin\varepsilon)}{\pi ab} = \frac{t}{T};$$

$$t = \frac{T(\varepsilon - e\sin\varepsilon)}{2\pi}$$ **0,25 p**

reprezentând durata deplasării centrului Lunii din poziţia L_0, până în poziţia L.

Dacă viteza unghiulară medie, în mişcarea Lunii pe elipsa mare în jurul Pământului, este:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

iar Ω este viteza unghiulară corespunzătoare rotației Lunii în jurul axei proprii, știind că cele două viteze unghiulare sunt egale $(\omega = \Omega)$, atunci, unghiul cu care, în timpul t, Luna s-a rotit uniform în jurul axei proprii (egal cu unghiul rotației axei de referință din planul secțiunii orbitale a Lunii), este:

$$\delta = \Omega t = \omega t = \frac{2\pi}{T}\frac{T(\varepsilon - e\sin\varepsilon)}{2\pi} = \varepsilon - e\sin\varepsilon \qquad \mathbf{0{,}5\ p}$$

Din triunghiul LCF_1, utilizând teorema sinusurilor, rezultă:

$$\frac{d_{CF_1}}{\sin\varphi} = \frac{d_{LF_1}}{\sin(\theta - \varphi)};$$

$$\delta + \varphi = \theta;\ d_{LF_1} = r;$$

$$d_{CF_1} = r\frac{\sin\varphi}{\sin(\theta - \varphi)} = r\frac{\sin\varphi}{\sin\delta},$$

astfel încât, pentru intervalul $\Delta = d_{CF_2}$, care ne interesează, rezultă:

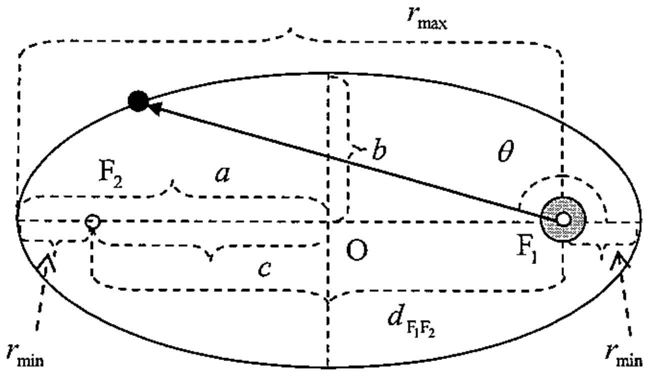
$$\Delta = d_{CF_2} = d_{CF_1} - d_{F_1F_2} \qquad \mathbf{1\ p}$$

Pentru calculul distanței dintre focarele elipsei, $d_{F_1F_2}$, utilizând ecuația elipsei în coordonate polare plane și desenul din figura alăturată, rezultă:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta};$$

$$\theta = 0;\ r = r_{min} = \frac{p}{1+e};$$

$$\theta = \pi;\ r = r_{max} = \frac{p}{1-e} \qquad \mathbf{1\ p}$$



$$r_{min} + r_{max} = 2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2};$$

$$p = a(1 - e^2);$$

$$r_{min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e);$$

$$c = a - r_{min} = ae;$$

$$d_{F_1F_2} = 2c = 2ae.$$

În aceste condiții, pentru intervalul $\Delta = d_{CF_2}$, rezultă:

$$\Delta = d_{CF_1} - d_{F_1F_2} = r\frac{\sin\varphi}{\sin\delta} - 2ae;$$

$$\Delta = \frac{p}{1+e\cos\theta}\frac{\sin\varphi}{\sin\delta} - 2ae = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\frac{\sin\varphi}{\sin\delta} - 2ae;$$

$$\frac{\Delta}{a} = \frac{\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\frac{\sin\varphi}{\sin\delta} - 2e; \ \varphi = \theta - \delta;$$

$$\frac{\Delta}{a} = \frac{\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\frac{\sin(\theta-\delta)}{\sin\delta} - 2e;$$

$$\frac{\Delta}{a} = \frac{\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}(\sin\theta\cot\delta - \cos\theta) - 2e;$$

$$\delta = \varepsilon - e\sin\varepsilon;$$

$$\cot\delta = \cot(\varepsilon - e\sin\varepsilon);$$

$$\cos\theta = \frac{\cos\varepsilon - e}{1-e\cos\varepsilon}; \ \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\sqrt{1-e^2};$$

$$1+e\cos\theta = \frac{1-e^2}{1-e\cos\varepsilon};$$

$$\frac{\Delta}{a} = -e + \sin\varepsilon\sqrt{1-e^2}\cot\delta - \cos\varepsilon;$$

$$\frac{\Delta}{a} = \sin\varepsilon\sqrt{1-e^2}\cot(\varepsilon - e\sin\varepsilon) - e - \cos\varepsilon;$$

$$\frac{\Delta}{a} \approx \frac{\cos\varepsilon}{2}e^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 2\cos^2\varepsilon\right)e^3;$$

$$\varepsilon = 0; \ e = 0{,}0549;$$

$$\frac{\Delta}{a} = \frac{1}{2}0{,}00301401 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 2\right)0{,}000165469;$$

$$\frac{\Delta}{a} = \frac{1}{2}0{,}00301401 + \frac{1}{2}0{,}000165469 = 0{,}00158974;$$

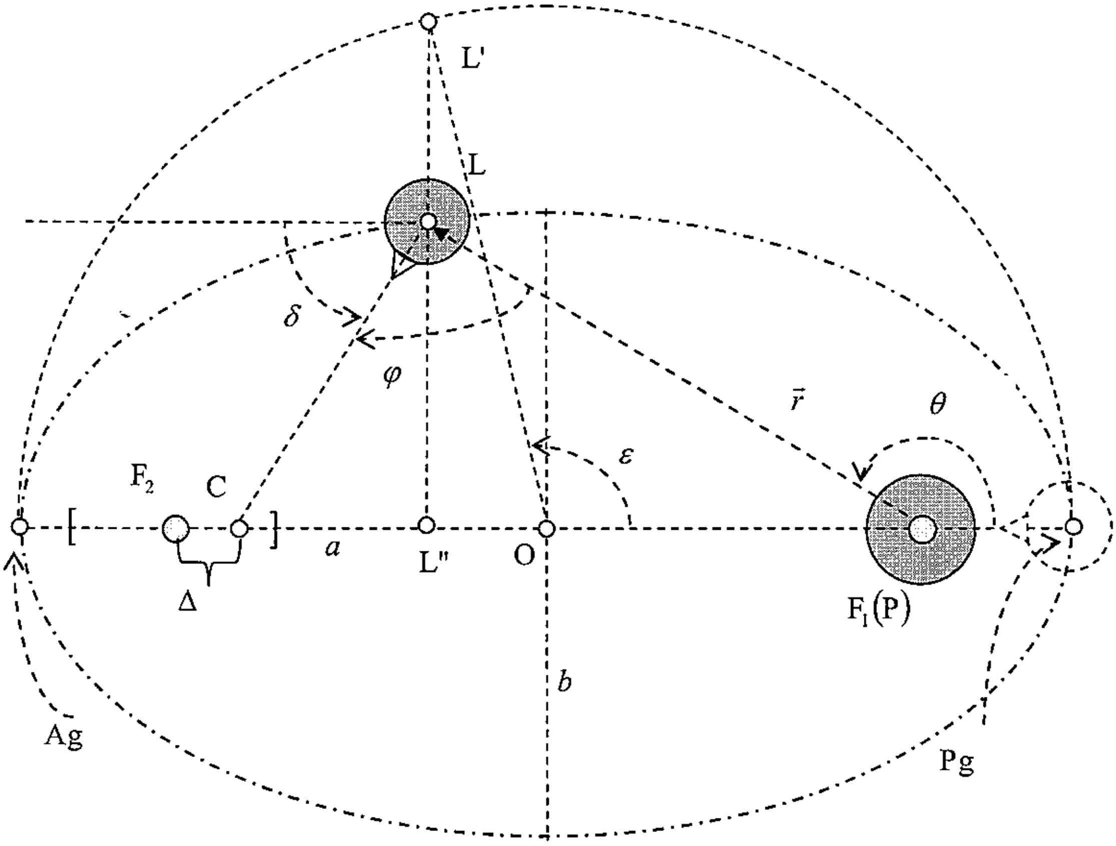
$$a = 384.400 \text{ km};$$

$$\Delta = 611{,}09 \text{ km},$$

reprezentând distanţa maximă la care se poate afla punctul C, faţă de focarul F_2, în stânga acestuia, realizată pentru $\varepsilon \to 0$;

$$\Delta_{\text{max,stânga}} = 611{,}09 \text{ km}$$ **1,5 p**

Să analizăm acum situaţia reprezentată în figura alăturată, când Luna se află pe orbita eliptică, într-un moment când unghiul δ este mare şi punctul C se află la dreapta focarului F_2.



În aceste condiţii, pentru intervalul $\Delta = d_{CF_2}$, rezultă:

$$\Delta = d_{F_1F_2} - d_{CF_1} = 2ae - r\frac{\sin\varphi}{\sin\delta};$$

$$\Delta = 2ae - \frac{p}{1+e\cos\theta}\frac{\sin\varphi}{\sin\delta} = 2ae - \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\frac{\sin\varphi}{\sin\delta};$$

$$\frac{\Delta}{a} = 2e - \frac{\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\frac{\sin\varphi}{\sin\delta};\ \varphi = \theta - \delta;$$

$$\frac{\Delta}{a} = 2e - \frac{\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\frac{\sin(\theta-\delta)}{\sin\delta};$$

$$\frac{\Delta}{a} = 2e - \frac{\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\left(\sin\theta\cot\delta - \cos\theta\right);$$

$$\delta = \varepsilon - e\sin\varepsilon;$$

$$\cot\delta = \cot\left(\varepsilon - e\sin\varepsilon\right);$$

$$\cos\theta = \frac{\cos\varepsilon - e}{1-e\cos\varepsilon};\ \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\sqrt{1-e^2};$$

$$1+e\cos\theta = \frac{1-e^2}{1-e\cos\varepsilon};$$

$$\frac{\Delta}{a} = e - \sin\varepsilon\sqrt{1-e^2}\cot\delta + \cos\varepsilon;$$

$$\frac{\Delta}{a} = e - \sin\varepsilon\sqrt{1-e^2}\cot\left(\varepsilon - e\sin\varepsilon\right) + \cos\varepsilon;$$

$$\frac{\Delta}{a} = -\left[-e + \sin\varepsilon\sqrt{1-e^2}\,\cot(\varepsilon - e\sin\varepsilon) - \cos\varepsilon\right];$$

$$\frac{\Delta}{a} \approx -\frac{\cos\varepsilon}{2}e^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 2\cos^2\varepsilon\right)e^3;$$

$$\frac{\Delta}{a} \approx -\left[\frac{\cos\varepsilon}{2}e^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 2\cos^2\varepsilon\right)e^3\right];$$

$$\varepsilon = \pi;\ e = 0{,}0549;$$

$$\frac{\Delta}{a} = \frac{1}{2}0{,}00301401 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 2\right)0{,}000165469;$$

$$\frac{\Delta}{a} = \frac{1}{2}0{,}00301401 - \frac{1}{2}0{,}000165469 = 0{,}001424271;$$

$$a = 384.400 \text{ km};$$

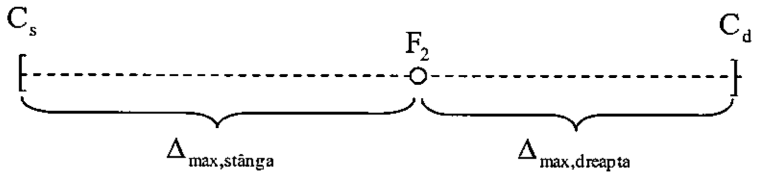
$$\Delta = 547{,}48 \text{ km}$$ **1,5 p**

reprezentând distanţa maximă la care se poate afla punctul C, faţă de focarul F_2, în dreapta acestuia, realizată pentru $\varepsilon \to \pi$;

$$\Delta_{max,dreapta} = 547{,}48 \text{ km};$$

$$\Delta_{max,dreapta} < \Delta_{max,stânga},$$

ceea ce dovedeşte asimetria celor două intervale, faţă de focarul F_2, aşa cum ilustrează figura alăturată.



0,5 p

b) Dacă direcţia axei de referinţă din planul secţiunii orbitale a Lunii, intersectează axa mare a elipsei în focarul F_2 al acesteia, însemnează că:

$$\frac{\Delta}{a} \approx \frac{\cos\varepsilon}{2}e^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 2\cos^2\varepsilon\right)e^3 = 0$$ **2 p**

din care rezultă:

$$4e\cos^2\varepsilon + 3\cos\varepsilon - e = 0;$$

$$\cos\varepsilon = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16e^2}}{8e};$$

$$\cos\varepsilon = \frac{-3 \pm 3{,}008}{0{,}4392};$$ **1 p**

$$\cos\varepsilon = \frac{-3 + 3{,}008}{0{,}4392} = 0{,}018214;$$

$$\varepsilon \approx 89^0;$$

$$\cos\theta = \frac{\cos\varepsilon - e}{1 - e\cos\varepsilon};$$

$$\cos\theta \approx -0{,}036722721;$$

$$\theta \approx 92{,}15^0.$$