Olimpiada Naţională de Astronomie şi Astrofizică
Ilfov, 4 aprilie 2012
Barem proba de analiza datelor
SENIORI

SUBIECT I – 10 puncte

Punctaj total 10 p

Soluţii

Pentru a calcula strălucirea unei stele vom aduna energiile acumulate de fiecare pixel al imaginii stelei. Dacă E_{xy} este energia înmagazinată în pixelul *xy*, datorată razelor de lumină provenite de la stea, atunci fluxul de energie recepţionat într-un timp egal cu timpul de expunere al imaginii prin suprafaţa activă a detectorului va fi: $F = \frac{1}{tS}\sum_{x,y} E_{xy}$, unde S este suprafața utilă a detectorului, iar t timpul de expunere. — 1,00 p

Întrucât detectorul nu poate distinge între razele de lumină provenite de la stea şi cele provenite de la alte surse aflate aproape în aceeaşi direcţie, este necesar să ţinem cont de aceste raze de lumină de background (chiar detectorul poate contribui la aceste efect de *background*). Prin urmare, semnalul S_{xy} înregistrat de detector în pixelul *xy* va fi suma dintre semnalul provenit de la stea E_{xy} şi cel provenit din *backgound* B_{xy}: $S_{xy} = E_{xy} + B_{xy}$. — 1,50 p

Problema principală este cum extragem *backgroundul* B_{xy} din semnalul provenit de la stea E_{xy}. Acest lucru se poate rezolva determinând energia înmagazinată în pixelii din imediata vecinătate a imaginii stelei şi calculând valoarea medie a energiei provenite de la aceştia, notată cu B (prin urmare *backgroundul* din imaginea stelei va fi B - o aproximaţie bună pentru rezolvarea problemei). Cu această aproximare strălucirea stelei va fi dată de: — 1,50 p

$$F_{stea} = \frac{1}{tS}\sum_{x,y}\left(S_{xy} - B\right)_{stea} .$$

0,50 p

Diferenţa de magnitudini aparente între o stea etalon şi o stea de magnitudine aparentă necunoscută va fi atunci:

$$m_{stea\ necunoscută} - m_{stea\ etalon} = -2,5\log_{10}\frac{F_{stea\ necunoscută}}{F_{stea\ etalon}} = -2,5\log_{10}\left\{\frac{\sum_{x,y}\left(S_{xy} - B\right)_{stea\ necunoscută}}{\sum_{x,y}\left(S_{xy} - B\right)_{stea\ etalon}}\right\}$$

0,50 p

Cu acestea, utilizând imaginea dată şi tabelul de date se obţin:

- datele necesare calculării backgroundului mediu pentru steaua etalon şi pentru steaua necunoscută:

34	16	26	33	37	22	25	25	29	19	28	25
22	20	44	34	22	26	14	30	30	20	19	17
31				37	25	35	36	39	39	23	20
34				38	28	46				37	22
33				36	32						30
22				36	24						24
28	22	17	16	32	24	46				42	22
18	25	27	26	17	18	30	29	35	24	30	27
32	23	16	29	25	24	30	28	20	35	22	23
28	28	28	24	26	26	17	19	30	35	30	26

2,00 p

Se obţine: $B = 27,42$ 0,50 p

- datele necesare calculării energiei provenite de la cele două stele:

70	98	66
99	229	107
67	103	67
33	34	29

	102	159	93	
69	240	393	248	69
65	241	363	244	68
	85	157	84	

1,50 p

$S_{xy,\ stea\ necunoscută} = 1002$ $S_{xy,\ stea\ etalon} = 2680$ 0,20 p

Atunci, magnitudinea aparentă a stelei necunoscute se obţine:

$$m_{stea\ necunoscută} - m_{stea\ etalon} = -2,5\log_{10}\left\{\frac{1002-27,42}{2680-27,42}\right\} \Rightarrow$$ 0,60 p

$$m_{stea\ necunoscută} = 9 - 2,5\log_{10}\frac{974,58}{2652,58} = 9 - 2,5\log_{10}(0,36741) \Rightarrow$$

$$m_{stea\ necunoscută} = 9 + 1,09 = 10,09$$ 0,20 p

Notă: se va acorda punctaj maxim, chiar dacă elevul alege un număr suplimentar de pixeli pentru calculul backgroundului şi a strălucirii stelelor considerate. Se consideră corectă şi o valoarea a magnitudinii cu +/- 0,2 faţă de valoarea propusă în barem.

Ilfov, 4 aprilie 2012

Barem proba de analiza datelor

SENIORI

SUBIECT II – 10 puncte

1. a)

$$L_{acretie} = \frac{GM}{2R} \times \frac{dM}{dt} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\times2\times10^{30}}{2\times10^{7}}\times6{,}35\times10^{14} = 4{,}45\times10^{27}\frac{J}{s}$$ **(1,0 p)**

$$\frac{L_{nova}}{L_{acretie}} = \frac{10^{31}}{4{,}45\times10^{27}} \cong 2247$$ **(0,5 p)**

b)

$$L_{nova} = 4\pi R^2 \times \sigma T^4$$

$$T = \left(\frac{L_{nova}}{4\pi R^2\times\sigma}\right)^{1/4} \cong 6\times10^5 K$$ **(0,5 p)**

Din legea lui Wien se calculează lungimea de undă corespunzătoare maximului de intensitate:

$$\lambda_{\max}\times T = b$$

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} = 4{,}82\times10^{-9} m$$ **(0,5 p)**

Nova produce cea mai multă radiaţie în domeniul razelor X (se consideră corect şi răspunsul în UV îndepărtat) **(0,5 p)**

c)

dacă se notează cu t timpul dintre două nove consecutive şi cu Δt durata novei, energia dezvoltată de novă este:

$$W_{nova} = L_{nova}\times\Delta t = 8{,}6\times10^{37} J$$ **(1,0 p)**

Dar, conform datelor problemei:

$$W_{nova} = 0{,}5\times0{,}007\times0{,}1\times\left(\frac{dM}{dt}\right)\times t\times c^2$$ **(1,0 p)**

$L_{nova}\times\Delta t\ = 0{,}5\times0{,}007\times0{,}1\times\left(\frac{dM}{dt}\right)\times t\times c^2$ ==> t = 136,476 ani **(1,0 p)**

2. Luminozitatea maximă a Lunii este atunci când este cel mai aproape de Soare. Considerând orbitele circulare, la echilibru termic vom avea:

$$\frac{L_S}{4\pi(d_{P-S}-D)^2}\cdot\pi R_L^2\cdot(1-\alpha) = 4\pi R_L^2\cdot\sigma\cdot T_L^4$$ **(2,0 p)**

$$L_{\max} = \frac{L_S\cdot R_L^2(1-\alpha)}{4(d_{P-S}-D)^2}$$

$$L_{acr} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6M_L}{R_L} \cdot \frac{dM}{dt}$$ **(1,0 p)**

$$\frac{L_{\max}}{L_{acr}} = \frac{L_S \cdot R_L^2 \cdot (1-\alpha)}{4(d_{P-S} - D)^2} \cdot \frac{2R_L \frac{dM}{dt}}{G\rho_L \frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{3 \cdot L_S (1-\alpha)}{8 \cdot G \cdot \rho_L \cdot \pi \cdot (d_{P-S} - D)^2}$$ **(1,0 p)**

SUBIECT III – 10 puncte

Rezolvare:

a) **(6,5p)** Se măsoară pe harta dată coordonatele ecuatoriale pentru fiecare stea în parte, utilizând următoarea metodă (se aproximează sectoarele mici de cerc cu segmente):

- declinația se măsoară folosind rigla, cu ajutorul cercului de declinație **(0,5 p)**
- ascensia se măsoară folosind următorii pași:
  - se măsoară distanța de la stea la cel mai apropiat "meridian" de pe caroiaj și se obține valoarea l_i, cu $i = \overline{1,7}$ **(0,5 p)**
  - datorită faptului că măsurătorile se efectuează pe cercuri mici se calculează

$$L_i = \frac{l_i}{\cos\delta_i}$$ **(1,0p)**

Din măsurători se obțin valori apropiate de valorile reale ale declinațiilor și ascensiilor stelelor, astfel:

Dubhe: $\alpha = 11^h, \delta = 61^\circ$

Merak: $\alpha = 11^h, \delta = 56^\circ$

Phad: $\alpha = 11^h 54^m, \delta = 53^\circ$

Megrez: $\alpha = 12^h 15^m, \delta = 57^\circ$

Alioth: $\alpha = 12^h 54^m, \delta = 57^\circ$

Mizar: $\alpha = 13^h 23^m, \delta = 55^\circ$

Alkaid: $\alpha = 13^h 47^m, \delta = 50^\circ$

Se obține punctaj corepunzător pentru valori relativ apropiate **(1,0 p)**

Transferând în coordonate carteziene, se obțin relațiile:

$$x_i = R\cos\delta_i \cdot \sin\alpha_i, y_i = R\cos\delta_i \cdot \cos\alpha_i, z_i = R\sin\delta_i$$ **(1,0 p)**

Pentru ***efectuarea calculelor*** corespunzatoare centrului de masă avem:

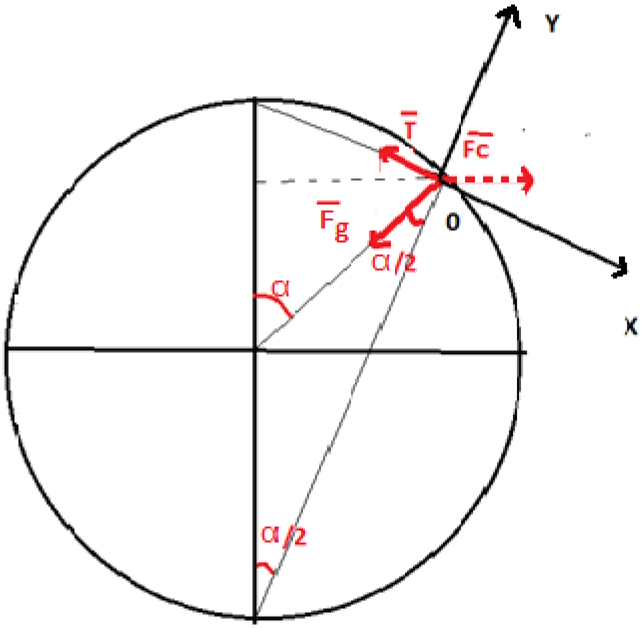
$$x_c = \frac{R\sum_{i=1}^{7} M_i \cos\delta_i \cdot \sin\alpha_i}{\sum_{i=1}^{7} M_i}, y_c = \frac{R\sum_{i=1}^{7} M_i \cos\delta_i \cdot \cos\alpha_i}{\sum_{i=1}^{7} M_i}, z_c = \frac{R\sum_{i=1}^{7} M_i \sin\delta_i}{\sum_{i=1}^{7} M_i}$$ **(1,5p)**

$$R_{cm} = \sqrt{x_c^{\,2} + y_c^{\,2} + z_c^{\,2}}$$

Datorită aproximației din enunț, măsura unghiului dintre R_{cm} și axa verticală ce trece prin poli este exact $90 - \delta_{cm}$, de unde reiese declinația centrului de masă. **(1p)**

b) **(3,5p)**

Pentru desen **(0,5p)**



De la punctul a) se determină unghiul $\alpha = 90 - \delta_{cm}$

$$F_g = \frac{G \times m \times M}{R^2}$$ **(0,5p)**

$$F_c = m \times \omega^2 \times R$$

$$\omega = \omega_p = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_{sinodic}} = \frac{2\pi}{24 \times 3600}$$

$$\omega = 7{,}26 \times 10^{-5} rad/s$$ **(0,5p)**

Din echilibrul fortelor pe axele XOY, convenabil alese, avem:

Pe OY:

$$F_c \sin\frac{\alpha}{2} = F_g \cos\frac{\alpha}{2}$$ **(1,0p)**

$$m \times \omega^2 \times R \times \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{GmM}{R^2} \times \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$R^3 = \frac{K \times M \times \cot\frac{\alpha}{2}}{\omega^2}$$

Finalizare (determinare rezultat numeric): **(1,0 p)**

SUBIECT IV – 10 puncte

Relaţia Tully – Fischer (10p)

a) **(2,0 p)**

Egalând acceleraţia centripetă cu cea gravitaţională (considerând chiar mişcare circulară)

$$\frac{v_r^2}{R} = \frac{GM}{R^2}$$ **(1,0 p)**

Utilizând cele două ipoteze date şi înlocuind în relaţia de mai sus, obţinem:

$$M = \frac{1}{\alpha} L \quad R = \sqrt{\frac{L}{\sigma}}$$

$$v_r^4 = \frac{G^2 M^2}{R^2} = G^2 \frac{L^2}{\alpha} \frac{\sigma}{L}$$ **(1,0 p)**

Astfel, se observă imediat că:

$L = \gamma v_r^4$, γ fiind o constantă

b) **(8,0 p)**

Considerând relaţia dintre luminozitate și magnitudinea absolută, înlocuind cu relaţia determinată la punctul a):

$$M = -2,5 \lg L + C_1 = -10 \lg v_r + C_2$$

Astfel, relaţia căutată este de forma

$$M = a \lg v_r + b$$ **(1,5 p)**

Din deplasarea spre roşu datorată mişcării de rotaţie a galaxiei obţinem vitezele de rotaţie pentru fiecare dintre acesteia înlocuind numeric în următoarea relaţie:

$$\frac{2v_r}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = z$$ **(0,5 p)**

v_r (viteza rotație)	$\log(v_r)$	z
159	2.20	0.00106
199.5	2.30	0.00133
210	2.32	0.00140
219	2.34	0.00146
249	2.40	0.00166
210	2.32	0.00140
219	2.34	0.00146
330	2.52	0.00220
309	2.49	0.00206
300	2.48	0.00200
399	2.60	0.00266

Determinarea vitezei de rotație pentru fiecare galaxie din tabel **(1,0 p)**

Utilizând legea lui Hubble şi deplasarea spre roşu datorată recesiei galaxiei, putem determina distanţa până la fiecare galaxie dată în tabel:

$$\frac{v_r}{c} = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}$$ **(0,5 p)**

Legea lui Hubble

$$v = H_0 d$$ **(0,5 p)**

z (recesie)	v (recesie)	d (Mpc)
0.051314	14999.73	199.9963
0.061913	17999.95	239.9994
0.069044	19999.73	266.6631
0.065472	18999.9	253.332
0.109271	30999.86	413.3315
0.087114	24999.83	333.3311
0.083472	23999.81	319.9975
0.079844	22999.75	306.6634
0.061913	17999.95	239.9994
0.065472	18999.9	253.332
0.069861	20227.88	269.7051

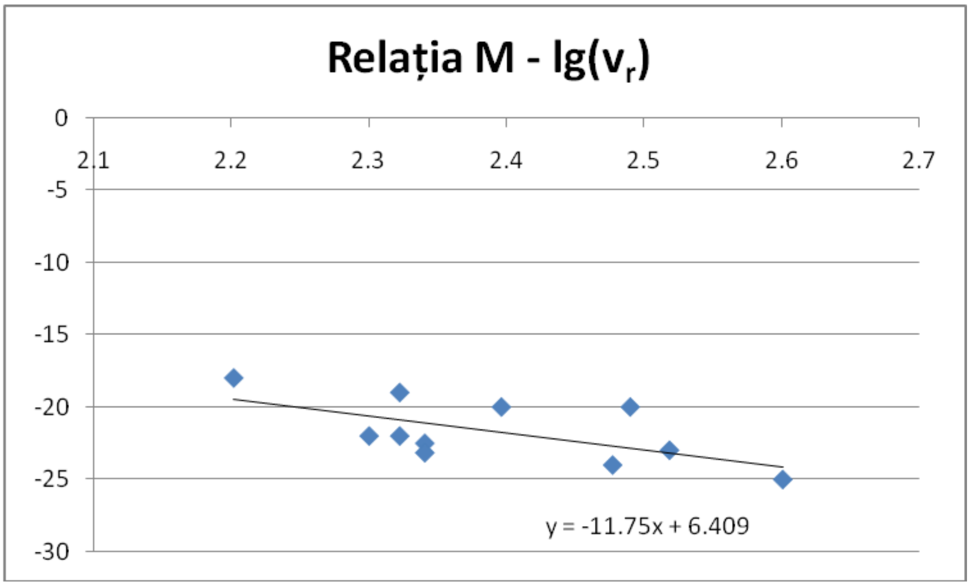
Determinarea distanței până la fiecare galaxie din tabel **(1,0 p)**

Din relaţia $m - M = 5\lg\frac{d}{10}$

M (magnitudinea absolută)	**m** (magnitudinea aparentă)
-18	18.50511017
-22	14.90105053
-19	18.12981431
-22.5	14.51845065
-20	18.08149269
-22	15.61437913
-23.15	14.37573302
-22.9788	14.45446752
-20	16.90105053
-24	13.01845065
-25	12.15444576

Determinarea magnitudinii absolute a fiecărei galaxii din tabel **(1,0 p)**

În final, se realizează graficul având pe axa **Ox** logaritmul vitezei, şi pe axa **Oy** magnitudinea absolută:



Realizarea graficului **(1,0 p)**
Identificarea coeficienților din relație **(1,0 p)**

SUBIECT V – 10 puncte

A. a) **(1p)** Dacă se au în vedere considerente dinamice, atunci:

$$v = \sqrt{K\frac{M_S}{R}},$$

iar dacă se au în vedere considerente cinematice, atunci:

$$v = \frac{2\pi R}{T_J}.$$

b) **(1p)** Corespunzător situaţiei reprezentate în figura 1, dacă atracţiile gravitaţionale exercitate asupra sondei sunt egale, rezultă:

$$K\frac{mM}{d^2} = K\frac{mM_S}{(R-d)^2};$$

$$d = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M}+\sqrt{M_S}}R.$$

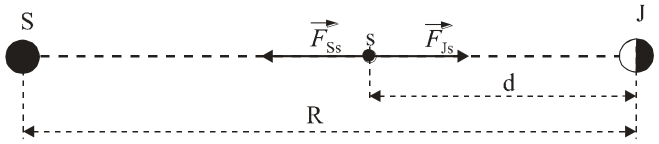


Fig. 1

B. c) **(1p)** Dacă $\vec{v}_0$ şi $\vec{v}$ sunt vitezele absolute (în raport cu Soarele) a sondei şi respectiv a lui Jupiter, atunci viteza relativă a sondei faţă de Jupiter, ales ca sistem de referinţă este:

$$\vec{v}_{sJ} = \vec{v}' = \vec{v}_0 - \vec{v},$$

a cărei orientare este reprezentată în figura 2, din care rezultă:

$$v' = \sqrt{v_0^2 + v^2};$$

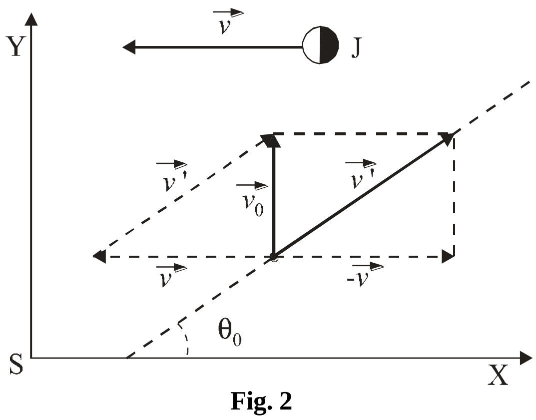


Fig. 2

$$\text{tg}\,\theta_0 = \frac{v_0}{v};\ \cos\theta_0 = \frac{v}{\sqrt{v_0^2 + v^2}};$$

$$\sin\theta_0 = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + v^2}}.$$

d) **(0,5 p)** $$E \approx \frac{1}{2} m v'^2.$$

C. e) **(2 p)** Din ecuaţia traiectoriei rezultă că distanţa radială a sondei faţă de Jupiter devine infinită ($r \to \infty$), astfel încât inversul său, $1/r \to 0$, atunci când:

$$1 + \sqrt{1 + \frac{2Eb^2 v'^2}{K^2 M^2 m}} \cos\theta = 0;$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Eb^2 v'^2}{K^2 M^2 m}}}.$$

Pe de altă parte, deoarece distanţa radială nu poate fi negativă $\left(r > 0;\ \frac{1}{r} > 0\right)$, rezultă:

$$1 + \sqrt{1 + \frac{2Eb^2 v'^2}{K^2 M^2 m}} \cos\theta \geq 0;$$

$$\cos\theta \geq -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Eb^2 v'^2}{K^2 M^2 m}}},$$

inecuaţie ale cărei soluţii, pentru cazul limită al semnului egal, sunt:

$$\theta_{!} = !\ \arccos\left[-\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Eb^2 v'^2}{K^2 M^2 m}}}\right];$$

$$\theta_{!} = !\left(\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Eb^2 v'^2}{K^2 M^2 m}}}\right).$$

Atunci când sonda spaţială a ajuns foarte departe de Jupiter э ($\vec{r}$; asimptotă) $\to 0$ (fig. 3), astfel încât pentru deviaţia unghiulară totală a sondei, datorită trecerii pe lângă Jupiter, avem:

$$\Delta\theta = (\theta_+ - \theta_-) - \pi;$$

$$\Delta\theta = \pi - 2\arccos\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Eb^2 v'^2}{K^2 M^2 m}}};$$

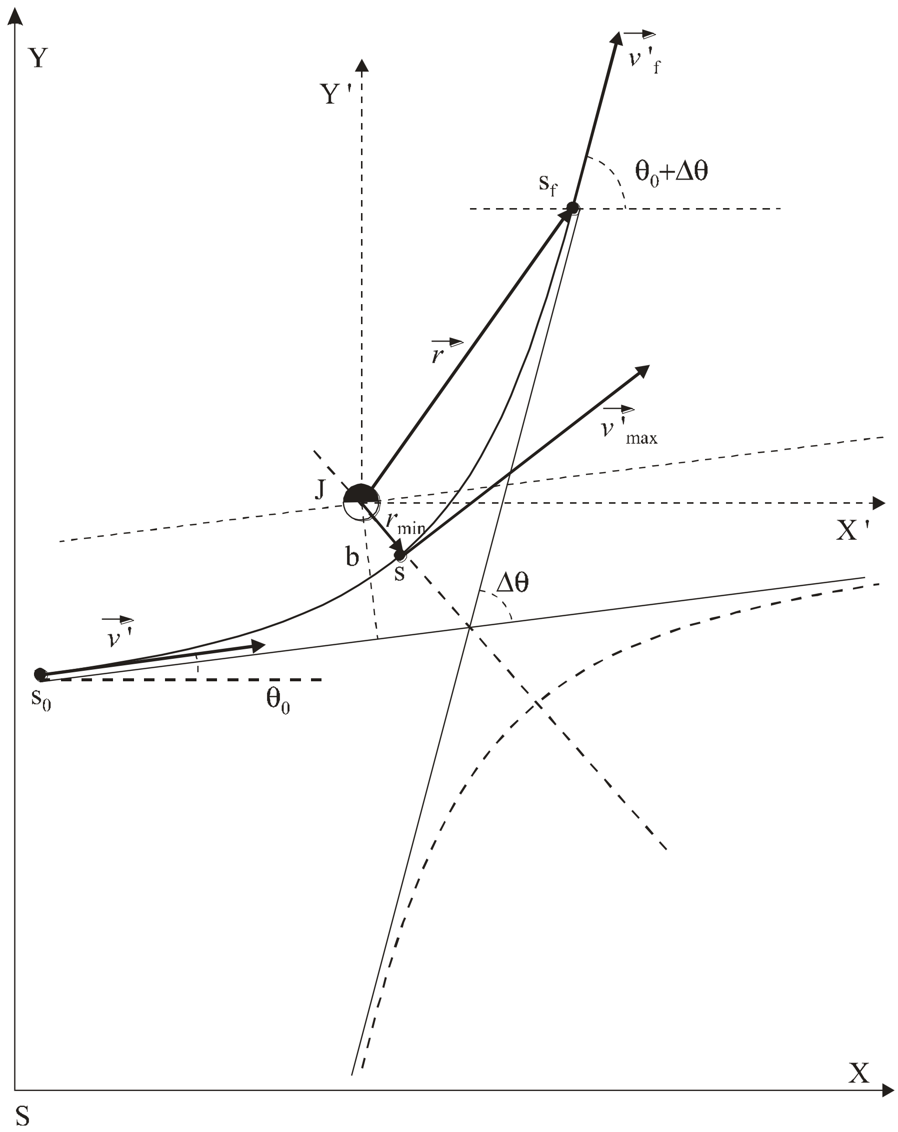


Fig. 3

$$\Delta\theta = \pi - 2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{b^2\,\mathrm{v}'^4}{K^2M^2}}}.$$

f) **(1,5 p)** Distanţa radială dintre sondă şi Jupiter este minimă ($r_{\min}$) atunci când $\theta = 0$, astfel încât, din ecuaţia traiectoriei sondei, rezultă:

$$r_{\min} = \frac{b^2\,\mathrm{v}'^2}{KM}\left(1+\sqrt{1+\frac{b^2\,\mathrm{v}'^4}{K^2M^2}}\right)^{-1};$$

$$b = \sqrt{r_{\min}^2 + \frac{2KM}{\mathrm{v}'^2}r_{\min}};$$

$$r_{\min} = 3R_J\,;\quad b = b_{\min};$$

$$b_{\min} = \sqrt{9R_J^2 + \frac{6KM}{v'^2}R_J}\ .$$

Observaţie: la acelaşi rezultat se ajunge utilizând legile de conservare ale momen-tului cinetic şi a energiei mecanice ale sistemului sondă-Jupiter:

$$L = mv'b = m\,v'_{\max} r_{\min};$$

$$E = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m\,v'^2_{\max} - K\frac{mM}{r_{\min}}\,,$$

unde $v'_{\max}$ este viteza sondei spaţiale în raport cu Jupiter când distanţa dintre sondă şi Jupiter este minimă.

Deoarece deviaţia unghiulară totală $\Delta\theta$ este o funcţie monoton descrescătoare de parametrul de ciocnire b, rezultă:

$$\Delta\theta_{\max} = \pi - 2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{b_{\min}^2\,v'^4}{K^2M^2}}}\,;$$

$$\Delta\theta_{\max} = \pi - 2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{v'^4}{K^2M^2}\left(9R_J^2 + \dfrac{6KM}{v'^4}R_J\right)}}\,.$$

g) **(2 p)** În starea iniţială, când sonda era foarte departe de Jupiter, viteza ei în raport cu acesta era $\vec{v}'$, astfel încât $\sphericalangle(\vec{v}'\,; JX') = \theta_0$.

În starea iniţială, când sonda a ajuns foarte departe de Jupiter, viteza ei în raport cu acesta este $\vec{v}'_f$, cu $v'_f = v'$ (datorită conservării energiei mecanice a sistemului sondă – Jupiter), astfel încât $\sphericalangle(\vec{v}'_f\,; JX') = \theta_0 + \Delta\theta$, având componentele:

$$v'_{x'} = v' \cos(\theta_0 + \Delta\theta);$$

$$v'_{y'} = v' \sin(\theta_0 + \Delta\theta).$$

Pe de altă parte, pentru $\vec{v}'_f$, care este viteza relativă a sondei faţă de Jupiter, avem:

$$\vec{v}'_f = \vec{v}'' - \vec{v}\,,$$

unde $\vec{v}''$ este viteza finală a sondei în raport cu centrul de masă al Soarelui (viteză absolută);

$$\vec{v}'' = \vec{v}'_f + \vec{v}\,,$$

aşa cum rezultă din figura 4, unde (s_0, J_0) sunt poziţiile iniţiale ale sistemului sondă – Jupiter în raport cu Soarele, iar (s_f, J_f) sunt poziţiile finale ale elementelor sistemului;

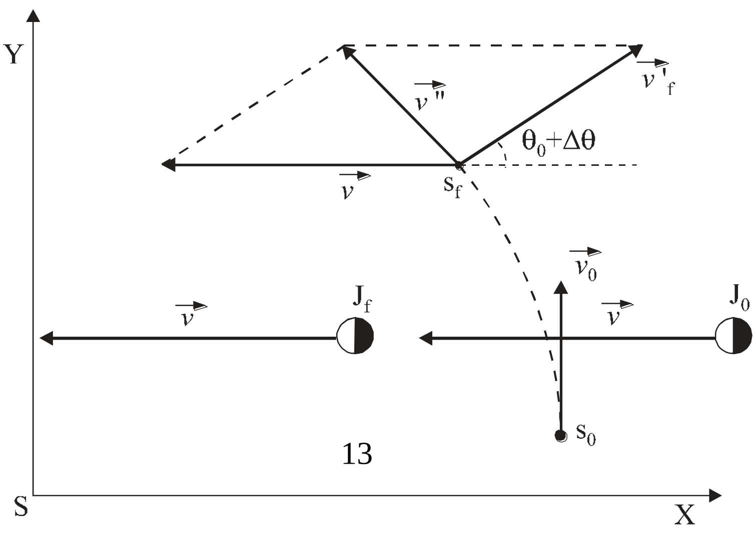


Fig. 4

$$\overrightarrow{v''} = \overrightarrow{v''_x} + \overrightarrow{v''_y} \ ,$$

$$v''_x = v - v'\cos(\theta_0 + \Delta\theta);$$

$$v''_y = v'\sin(\theta_0 + \Delta\theta);$$

$$v'' = \sqrt{v_0^2 + 2v^2 - 2vv'\cos(\theta_0 + \Delta\theta)} \ ;$$

$$v'' = \sqrt{v_0(v_0 + 2v\sin\Delta\theta) + 2v^2(1 - \cos\Delta\theta)} \ .$$

h) **(1p)**

$$v = 1{,}306 \cdot 10^4 \text{ m/s};$$

$$d = 2{,}333 \cdot 10^{10} \text{ m};$$

$$v' = 1{,}65 \cdot 10^4 \text{ m/s};$$

$$\theta_0 = 37{,}4^\circ;$$

$$E = 112 \text{ GJ};$$

$$b_{\min} = 4{,}9 \cdot 10^8 \text{ m} \approx 7{,}0 \text{ R}_\text{J};$$

$$\Delta\theta_{\max} = 87{,}\ 4^\circ;$$

$$v'' = 2{,}62 \cdot 10^4 \text{ m/s}.$$